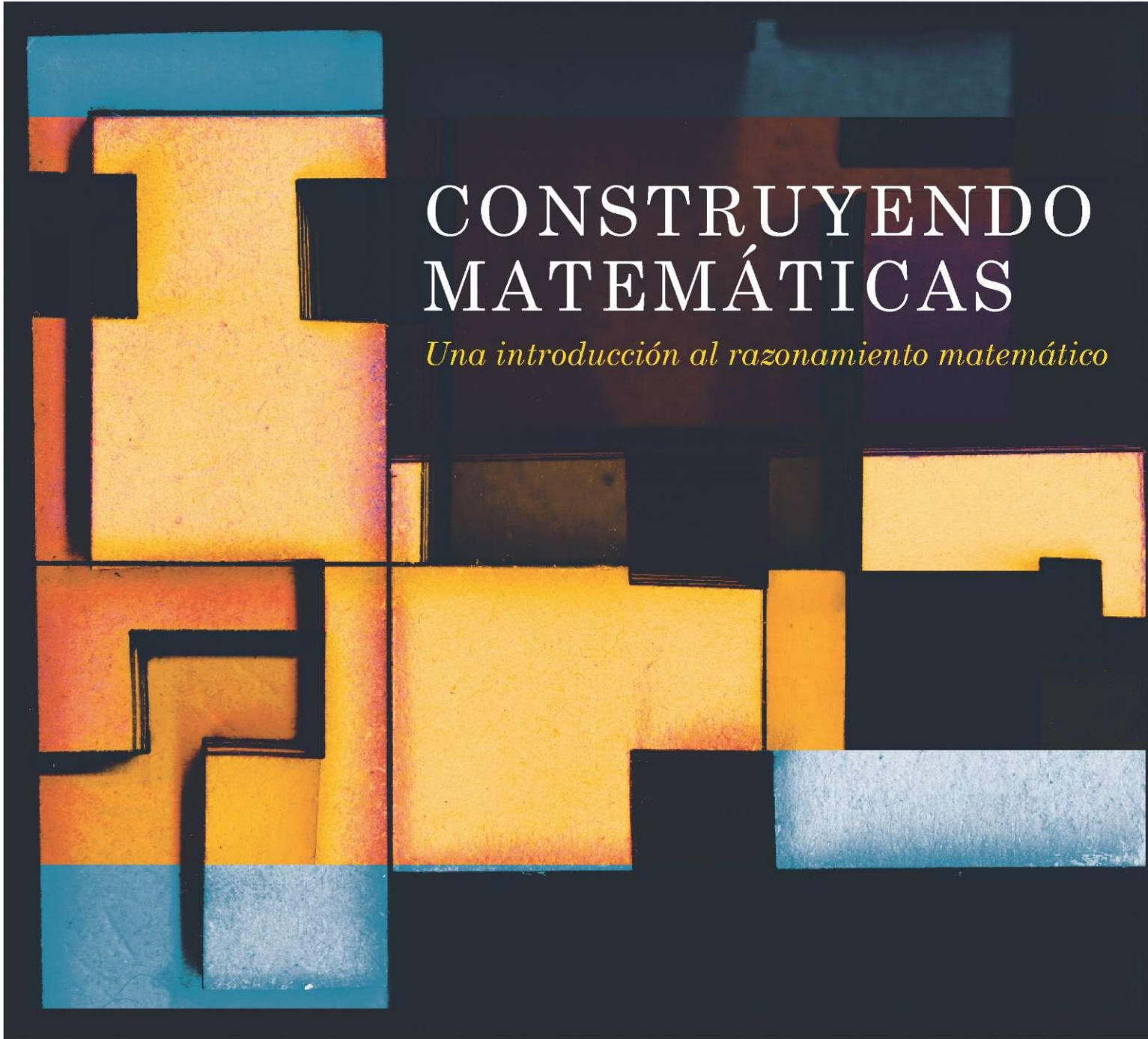




CONSTRUYENDO MATEMÁTICAS

Una introducción al razonamiento matemático

UACM

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO

Nada humano me es ajeno

Academia de matemáticas / Programa de integración

© *Construyendo Matemáticas. Una introducción al razonamiento matemático.*
Programa de integración

Segunda Edición 2010

© Mateo Barkovich y Leandro Chernicoff

Colaboradores: Alexandra Carreño, Annel Montes, Aída Suárez y Rita Vázquez

Diseño: Diego Mier y Terán

D.R. Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2010

Fray Servando No 99, Col. Centro, Delegación Cuahutémoc, C.P. 06080,
México, D.F.

ISBN:

Academia de Matemáticas: Programa de integración

Impreso en México

Distribución gratuita

Las simples pero difíciles artes de prestar atención, de copiar de manera precisa, seguir un argumento, detectar una ambigüedad o una inferencia falsa, probar las conjeturas recurriendo a ejemplos contrarios, organizar el tiempo y el pensamiento para el estudio. Todas estas artes...no pueden enseñarse en el aire, sino sólo a través de las dificultades de un tema definido; no pueden enseñarse en un curso de un año, deben adquirirse gradualmente mediante docenas de conexiones.

Jacques Barzun

Índice

	págs
Presentación	1
1 Perímetro	6
Biografía de Pitágoras	7
1.1 Teorema de Pitágoras	8
Demostración del Teorema de Pitágoras	13
1.2 Definición de perímetro	18
1.3 Perímetro del círculo	26
1.4 Perímetro de figuras compuestas	31
Problemas de Reto	33
1.5 Autoevaluación	35
Objetivos de aprendizaje del capítulo 1	37
2 Área	38
El problema de los cuatro colores	39
2.1 Definición de área	42
2.2 Cálculo de áreas	48
2.3 Área de figuras compuestas	56
2.4 Área del círculo	61
Exploración: El área del círculo	65
2.5 Perímetros y áreas: escalamiento	68
2.6 Perímetros y áreas: aplicaciones	74
Problemas de Reto	78
2.7 Autoevaluación	82
Objetivos de aprendizaje del capítulo 2	85
3 Recta Numérica y definiciones operacionales	86
Las reglas del juego	87
3.1 La recta numérica	89
3.2 Definiciones operacionales	98
3.3 Autoevaluación	106
Objetivos de aprendizaje del capítulo 3	107
4 Fracciones	108
El juego del “numerito”	109
4.1 Fracciones	111
4.2 Fracciones con igual denominador	115
4.3 Suma y resta de fracciones usando esquemas	119

4.4	Interpretación de números calculados	120
4.5	Fracciones impropias	124
4.6	Ubicando fracciones en la recta numérica	127
4.7	Fracciones equivalentes	129
4.8	Comparación de fracciones	133
4.9	Fracciones irreducibles	134
4.10	Fracciones y números decimales	135
4.11	Definiciones operacionales en las matemáticas	141
	Problemas de Reto	151
4.12	Autoevaluación	152
	Objetivos de aprendizaje del capítulo 4	154
5	Suma, resta producto y cociente de fracciones	156
	Cómo conseguir un contrato como consultor...	157
5.1	Suma y resta	159
5.2	Producto y cociente de fracciones	162
5.3	Definiciones de operaciones básicas	168
5.4	División de fracciones y fracciones complejas	176
5.5	Autoevaluación	183
	Objetivos de aprendizaje del capítulo 5	184
6	Razones y Proporciones	185
	Números grandes	186
6.1	Multiplicar o dividir	188
6.2	Razones	190
6.3	Proporciones	194
6.4	Regla de tres	196
6.5	Magnitudes directamente proporcionales	197
6.6	Porcentaje	202
6.7	Autoevaluación	205
	Objetivos de aprendizaje del capítulo 6	207
	Apéndice 1: Formato para la resolución de problemas	208
	Apéndice 2: Ejercicios de repaso	213
	Bibliografía	225

Presentación

Propósitos generales

Bienvenido al curso de “Taller de Matemáticas”. Aunque el nombre indica que este es un curso de matemática introductoria, tal vez descubras que es un curso distinto a lo que estás esperando.

A diferencia de los cursos de matemáticas que posiblemente tomaste con anterioridad, en donde el foco estaba centrado en cubrir contenidos que eran presentados por el maestro en el pizarrón, el objetivo principal de este curso es que sean ustedes, los estudiantes, los que *construyan y descubran* los contenidos relevantes a través de un proceso de *indagación* personal y grupal. El profesor intentará ayudarte, en general, con más preguntas que con respuestas.

Así, el papel del profesor y de los estudiantes será un poco distinto a lo que estás acostumbrado. No esperes recibir las “respuestas correctas” del profesor sino, más bien, que este te ayude a encontrar y construir tus propias respuestas.

Si todo sale bien, al terminar cada capítulo serás capaz de decir *qué* es lo que aprendiste y *cómo* lo aprendiste (qué cosas no entendías y cómo, finalmente, llegaste a comprenderlas).

No buscaremos que te entrenes en repetir pasos de memoria y aplicar fórmulas que no te hacen sentido. Queremos que te entrenes en resolver problemas, porque sin duda, ser capaz de resolver problemas es una habilidad imprescindible tanto en tu vida académica como profesional. Además, es la base de una formación crítica y científica que buscamos en esta Universidad.

Cuando resolvemos problemas de matemáticas, ponemos en práctica habilidades de razonamiento muy importantes tales como: *comprender* qué es exactamente lo que queremos resolver, *diseñar* una estrategia para resolverlo, aprender a *distinguir* si la estrategia es útil para resolver el problema o si hay que cambiarla, distinguir la información que nos ayuda a resolver el problema de la que no, y cuando tenemos la suerte de encontrar una solución, *verificar* si esta es consistente, o no, con lo que queremos. De este modo, las habilidades que buscamos que desarrolles son útiles no sólo en matemáticas, sino en casi cualquier actividad en la que te enfrentes a una situación problemática.

Dinámica de trabajo del curso

En este curso las actividades de aprendizaje están diseñadas para que te confrontes y analices situaciones problemáticas dentro y fuera del aula; la mayoría de las veces en equipo y algunas otras de forma individual. La dinámica de trabajo consistirá en:

- el trabajo y la discusión en equipos,
- el registro de las actividades (bitácora de trabajo),
- los trabajos para desarrollar dentro y fuera del aula (tareas),
- evaluaciones formativas y de exploración de ideas previas.

Trabajo en el aula

La mayor parte del trabajo que vas a realizar a lo largo del curso será llevado a cabo en equipos y consiste en indagar y analizar diversas situaciones problemáticas, tanto de tu experiencia como hipotéticas. Estas te llevarán a la construcción y consolidación de algunos conceptos matemáticos importantes. Este material te proporcionará una guía de las actividades que debes ir realizando para lograr este objetivo.

La bitácora:

Dado que tú vas a ir desarrollando y construyendo las habilidades y conceptos, es importante que escribas con mucha claridad y cuidado tus respuestas a todas las preguntas que se te plantean en cada actividad o ejercicio del cuaderno de trabajo. Este registro debe hacerse en un cuaderno dedicado exclusivamente a este propósito y que llamaremos bitácora de trabajo. Este libro no está diseñado para que lo uses como tú bitácora.

La bitácora es *personal* y fundamental para el trabajo del curso, por ello debes de traerla a todas las clases y:

- 1) Anotar todas las respuestas a las preguntas y ejercicios planteados en el libro haciendo clara referencia a las preguntas.
- 2) Procurar no borrar los ejercicios en los que te equivoques, te pueden ser de utilidad.
- 3) Completar las respuestas a las preguntas con explicaciones, ejemplos, dibujos, tablas, etc. El objetivo de esto es que al volver a leer lo que escribiste, por ejemplo un mes después o cuando resuelvas una tarea o estudies para una evaluación, puedas recordar qué razonamientos te llevaron a tus respuestas y conclusiones.

- 4) Registrar las dudas y/o comentarios que surjan a lo largo de la clase (o al hacer las tareas) para que no las olvides y puedas discutirlas posteriormente.

Como puedes ver, la bitácora es como un “diario” donde registras todo lo que vas haciendo, pensando, discutiendo, etc. durante el curso. La bitácora es tu herramienta de aprendizaje más importante.

Consideraciones importantes:

A lo largo de todo tu trabajo con estos materiales debes poner mucha atención en:

- 1) Entender las preguntas y ejercicios que se te están planteando. Para esto debes leer varias veces las preguntas y reflexionar en ellas. Si a pesar de lo anterior no te queda clara la pregunta, pídele ayuda al profesor. No respondas las preguntas o los ejercicios si no los has entendido. Cada pregunta y ejercicio tiene un propósito específico que puede perderse o confundirse si no lo entiendes.
- 2) Responder en el orden en el que se te presentan las preguntas y, de ser posible, no saltarte ninguna. Si lo haces puedes llegar a conclusiones erróneas o incompletas en actividades posteriores.
- 3) Pausar en los comentarios marcados con el símbolo . Cuando encuentres este tipo de comentario, quiere decir que has llegado a un punto en el que debes verificar tus razonamientos y conclusiones. Por ello debes avisarle al profesor para que los revise contigo. Si no los verificas en el momento adecuado y continúas trabajando, puedes llegar a conclusiones erróneas o incompletas en las actividades posteriores.
- 4) Hacer uso del “Formato para la resolución de problemas”. Cuando el profesor te lo indique, deberás usar el formato que se encuentra en el Apéndice 1. Este te ayudará a ordenar y aclarar tus ideas.

Carga horaria:

El tiempo mínimo de trabajo en el aula necesario para cubrir los propósitos del curso es de seis horas semanales. Es posible y normal que algunos estudiantes requieran dedicar más tiempo al trabajo en el aula dependiendo del ritmo en el que vayan avanzando individualmente. No esperes a estar muy atrasado para pedir asesorías a tu profesor.

Con base en los cursos anteriores, hemos visto que el tiempo de trabajo fuera del aula necesario para estudiar, hacer tareas y resolver dudas en asesorías es de aproximadamente otras seis horas semanales en promedio.

Evaluación

Este curso cuenta con diversas formas de evaluación y diagnóstico tanto para los estudiantes como para el profesor. Estas proporcionan información importante acerca del proceso de aprendizaje y del funcionamiento del curso que permiten hacer los ajustes necesarios por parte de los estudiantes y el profesor. Estas son:

- 1) La exploración de ideas previas. Estas se realizarán antes de cada capítulo y su objetivo es que identifiquemos las dificultades y preconcepciones con las que llegas a un tema dado. Es muy importante que tomes nota de estas dificultades en tu bitácora pues son estas las que esperamos que resuelvas a lo largo del capítulo.
- 2) Tu bitácora de trabajo. Esta es revisada en forma cotidiana por el profesor. Además, como una forma de evaluar tu bitácora, es posible que te pidamos que realices un reporte después de finalizar algún capítulo. En él se te pedirá que describas cómo fue que llegaste a algunas de las conclusiones más importantes de cada unidad. De esta manera podrás ir modificando tu bitácora para convertirla en una verdadera herramienta de aprendizaje.
- 3) Las tareas. Correspondientes a los contenidos y habilidades trabajados en cada capítulo.
- 4) Las autoevaluaciones. Al final de cada capítulo se presenta un conjunto de problemas relevantes, intenta resolverlos en *forma individual*. Esto te permitirá detectar las dificultades que aún persisten y solucionarlas.
- 5) Las evaluaciones formativas. De los contenidos y habilidades desarrolladas en uno o varios capítulos.

Al final de cada capítulo también encontrarás los “Objetivos de aprendizaje” donde se presenta una lista de cosas que debes de ser capaz de hacer después de haber terminado dicho capítulo.

Reglas de trabajo

Con base en la experiencia que hemos tenido al impartir este curso, los profesores que lo impartimos consideramos que las condiciones mínimas necesarias para que lo aproveches son:

- asistir puntualmente a todas las clases,
- hacer y entregar a tiempo todas las tareas,
- realizar todas las evaluaciones de ideas previas y formativas, y
- llevar un registro escrito cuidadoso de las actividades realizadas en el curso a través de la bitácora de trabajo.

Si no cumples con estas condiciones, los profesores no nos podemos comprometer a que alcances los propósitos del curso y por ello NO son negociables.

También es importante establecer normas de trabajo, en este caso:

- no copiar tareas ni evaluaciones para que los profesores podamos evaluar adecuadamente tu trabajo a lo largo del curso y con ello detectemos cuáles son tus dificultades y necesidades específicas,
- mantener un diálogo respetuoso con tus compañeros de equipo y con el resto del grupo para no dificultar el trabajo de nadie.

Si tienes alguna duda u objeción respecto de estas reglas o si te parece adecuado proponer otras que favorezcan tanto tu trabajo como el de tus compañeros, coméntaselo al profesor para que lo discutan con todo el grupo.

CAPÍTULO 1

Perímetro

Biografía de Pitágoras (adaptación)

*Adrián Paenza*¹

Pitágoras de Samos profeta y místico, nació en Samos, una de las islas Dodecanesas, no muy lejos de Mileto el lugar en donde nació otro gran filósofo: Tales. Algunos pintan a Pitágoras como alumno de Tales pero eso no parece muy probable debido a la diferencia de casi medio siglo entre ambos. Lo que si es muy probable es que Pitágoras haya ido a Babilonia y a Egipto, e incluso a la India, para obtener información de primera mano sobre matemáticas y astronomía, y eventualmente, también sobre religión.

Pitágoras fue, casualmente, contemporáneo de Buda, de Confucio y de Lao-Tze, en un siglo en plena ebullición desde el punto de vista de la religión, y de las matemáticas.

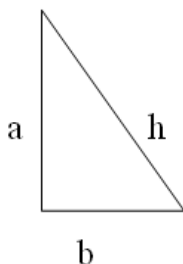
Cuando retornó a Grecia, se estableció en Crotón, en la costa sudeste de lo que actualmente es Italia, y que en ese momento se conocía como "La magna Grecia". Ahí estableció una sociedad secreta parecida a los cultos órficos; salvo por su base matemática y filosófica.

Que Pitágoras permanezca como un personaje oscuro se debe, en parte, a la pérdida de todos los documentos de esa época. Algunas biografías de Pitágoras fueron escritas en la antigüedad, inclusive por Aristóteles, pero no sobrevivieron. Otra dificultad para identificarlo claramente obedece al hecho de que la comunidad que estableció era secreta. Durante esta época el conocimiento y la propiedad eran comunes, por lo que los descubrimientos no se le atribuían a alguien en particular, sino que eran considerados patrimonio del grupo. Es por esto que es mejor no hablar del trabajo de Pitágoras, sino de las contribuciones de "los pitagóricos".

¹ Paenza, Adrián. *Matemáticas... ¿estás ahí?, sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina, 2005 págs. 107-110.

1.1 Teorema de Pitágoras

Imagina que tienes un triángulo rectángulo T, de lados a , b y h , como se muestra en la figura (se llama triángulo rectángulo a un triángulo en el que uno de los ángulos es de 90 grados, también llamado ángulo recto).



A los lados a y b los llamamos los “catetos” y al lado h lo llamamos la “hipotenusa”.

El teorema de Pitágoras dice que: "en todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

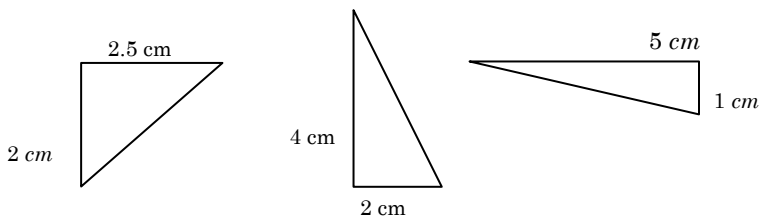
Lo anterior lo podemos expresar usando letras de la siguiente manera:

$$a^2 + b^2 = h^2,$$

donde a y b es la *medida* de los catetos, y h la medida de la hipotenusa.

Actividad 1.1.1

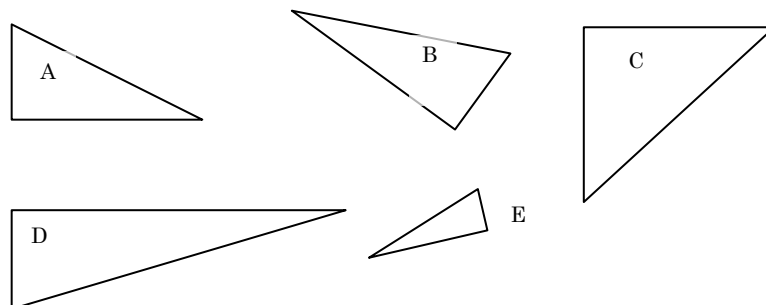
Encuentra la longitud de la hipotenusa en los siguientes triángulos:



Actividad 1.1.2

- 1) Mide todos los lados de los triángulos A,B,C,D y E con una regla, y escribe las mediciones en la tabla.

- 2) Aplica el Teorema de Pitágoras y calcula el valor de la hipotenusa.
- 3) Compara el valor que obtuviste con la medida tomada inicialmente, ¿son iguales?



Triángulo	Medición: Cateto 1	Medición: Cateto 2	Medición: Hipotenusa	Valor de hipotenusa utilizando el Teore- ma de Pitágoras
A				
B				
C				
D				
E				

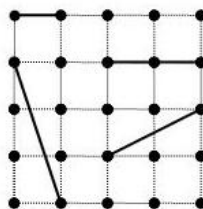
Actividad 1.1.3

- 1) Supón que te presentan un triángulo rectángulo. Explica cómo identificas cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa.
- 2) ¿Qué relación hay entre el valor de la hipotenusa obtenido aplicando el teorema y el valor que se obtiene al medirla físicamente? ¿Cuál de los dos valores te parece más confiable? Explica.
- 3) ¿A qué crees que se debe la diferencia entre el valor medido y el valor calculado?

 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En el geoplano de la siguiente figura se muestran cuatro segmentos de diferentes longitudes.



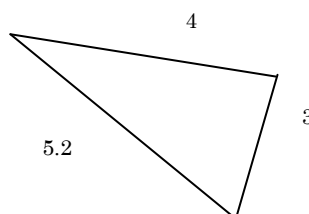
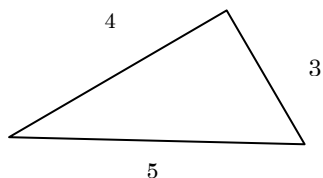
- 1) Encuentra otros cinco segmentos de diferente longitud a los ya señalados. Sólo se permiten los segmentos que tienen sus extremos en los puntos indicados.
- 2) Ordena todos los segmentos de mayor a menor de acuerdo a su longitud.
- 3) Usando el teorema de Pitágoras, determina la longitud de cada uno de los segmentos. Considera 1 como la unidad de medida de la cuadrícula, es decir, la distancia entre dos puntos horizontales o verticales es igual a 1.
- 4) ¿Cuál es el número máximo de segmentos de *diferente* longitud que puedes construir con el geoplano anterior? ¿Y si el geoplano fuera de 6×6? Explica.

2. Haciendo uso de regla y transportador dibuja cinco triángulos rectángulos y cinco que *no* lo sean (dibuja triángulos que sean muy claramente *no* rectángulos). Vuelve a repetir lo que hiciste en la actividad 1.1.2 con los diez triángulos que dibujaste.

- 1) ¿Qué diferencias encuentras entre los resultados que obtuviste en las últimas dos columnas de la tabla entre los triángulos que son rectángulos y los que no lo son? ¿Cómo identificaste la hipotenusa en los triángulos que no son rectángulos?
- 2) Con base en tus observaciones ¿para qué tipo de triángulos crees que se cumplirá el teorema? Explica tu razonamiento.
- 3) ¿Crees que el teorema se cumplirá para todo triángulo rectángulo? Explica.

Actividad 1.1.4

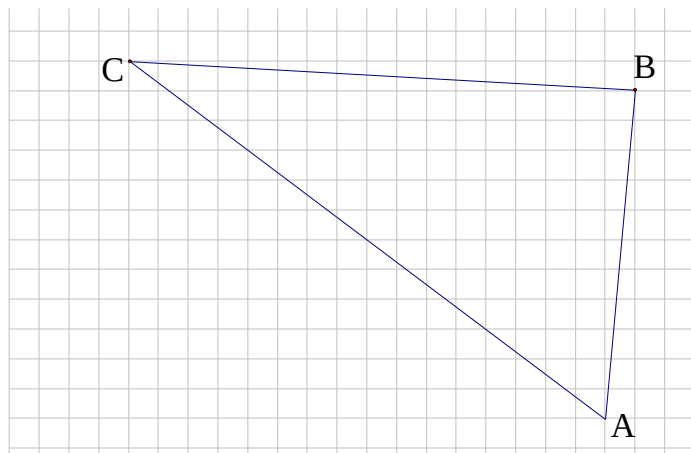
¿Cuál de los siguientes triángulos es rectángulo? ¿por qué?



Actividad 1.1.5

Reproduce el siguiente triángulo en tu cuaderno.

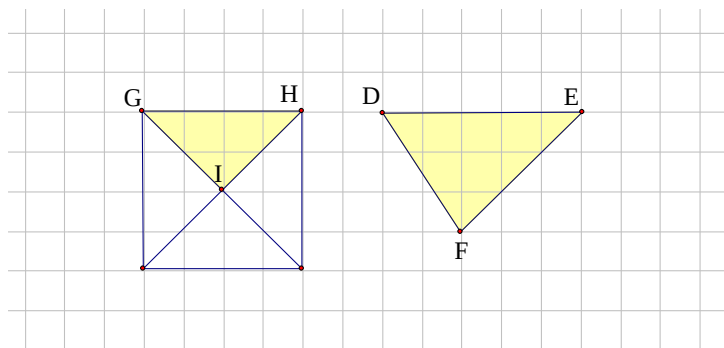
- 1) Mide los lados AB y BC
- 2) Determina el lado AC de la siguiente manera:
 - Usando la igualdad $AB^2 + BC^2 = AC^2$
 - Midiéndolo con una regla



- 3) ¿Coinciden tus resultados? Si no coinciden, explica porqué.
- 4) El triángulo ABC , ¿es rectángulo? Si tienes dudas, puedes medir el ángulo con un transportador.

Actividad 1.1.6

¿Cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos? Usa el Teorema de Pitágoras.



Actividad 1.1.7

- 1) Explica para qué tipo de triángulos se aplica el Teorema de Pitágoras.
- 2) Explica cómo puedes determinar si un triángulo es rectángulo, o no, utilizando una regla y el Teorema de Pitágoras (nota: no vale hacer uso de un transportador).

Actividad 1.1.8

Tres estudiantes discuten acerca de lo que han observado en sus trabajos con el teorema de Pitágoras:

Estudiante 1: "Después de haber checado el teorema de Pitágoras para todos los ejemplos anteriores ya estoy seguro que siempre será cierto para todo triángulo rectángulo".

Estudiante 2: "Yo creo que no hemos revisado suficientes triángulos. Hay que hacer mas pruebas. Si en **todas** estas se cumple el teorema entonces ya podemos estar seguros que el teorema es válido para **todo** triángulo rectángulo".

Estudiante 3: "Creo que no podemos estar 100% seguros, ¿cómo sabemos que el teorema será válido para **todo** triángulo rectángulo? No hemos checado **todas** las posibilidades".

¿Con cuál de los estudiantes estás de acuerdo? Explica tu respuesta.

- 1) Si estás de acuerdo con el segundo estudiante ¿con cuántos triángulos tendrías que checar el teorema para poder estar completamente seguro que se cumplirá para **todo** triángulo rectángulo? ¿con 1000? ¿con 10000? Explica.
- 2) Si estás de acuerdo con el tercer estudiante, ¿Qué tendrías que hacer para poder estar 100% seguro? Explica.

 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

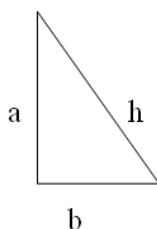
*La actividad anterior nos confronta con la necesidad de una **demostración** del teorema de Pitágoras. A continuación mostraremos cómo este teorema se cumple para **todo** triángulo rectángulo.*

Demostración del teorema de Pitágoras²

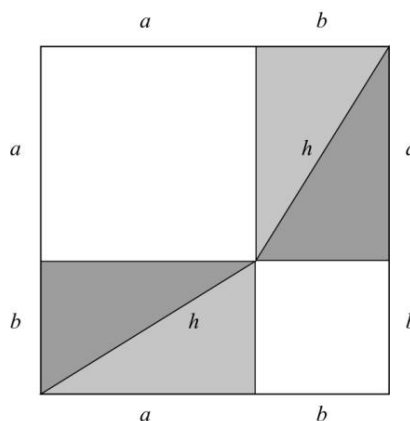
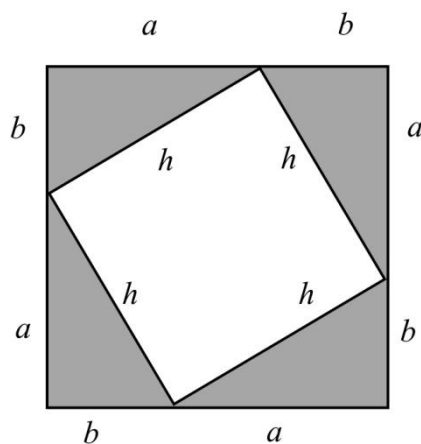
Hace muchos años, Carmen Sessa, -amiga mía y extraordinaria referente en cualquier tema que tenga que ver con la matemática- me acercó un sobre con varias demostraciones del teorema de Pitágoras. No recuerdo de donde las sacó, pero estaba entusiasmada al ver cuántas maneras distintas había de comprobar un mismo hecho. Es más: tiempo después supe que hay un libro *The Pythagorean Proposition* que contiene 367 pruebas de este teorema y que fue reeditado en 1968.

De todas formas, y volviendo a las pruebas que me dio Carmen, hubo una que me dejó fascinado por su simpleza; a partir de este momento nunca he parado de repetirla. Y de disfrutarla. Aquí va:

Se tiene un triángulo rectángulo T, de lados a , b y h .



Imaginemos que el triángulo T está formado por tres hilos; supongamos que se le puede "cortar" el lado h , y que podemos estirar los lados a y b . Con este nuevo segmento, de longitud $(a+b)$, fabricamos dos cuadrados iguales como los que se muestran a continuación.



² Paenza, Adrián. *Idem*.

El lado de cada uno de los cuadrados mide $(a+b)$. Marcamos en cada cuadrado los lados a y b .

Ahora, observemos en cada cuadrado cuántas veces aparece el triángulo T (para lo cual hay que marcar en el dibujo los triángulos T en cada cuadrado).

Como los cuadrados son iguales, una vez que hemos eliminado los cuatro cuadrados en cada dibujo, la superficie que queda "libre" tiene que ser la misma.

En el segundo cuadrado quedan dos "cuadraditos" de superficies a^2 y b^2 respectivamente. Por otro lado, en el otro cuadrado queda dibujado un "nuevo" cuadrado de área h^2 . Conclusión, el resultado tiene que ser:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

que es justamente lo que queríamos probar: "en todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

En este caso, los catetos son a y b , mientras que la hipotenusa es h .

¿No es una demostración preciosa? Es sólo producto de una idea maravillosa que no requiere ninguna herramienta complicada; sólo sentido común.

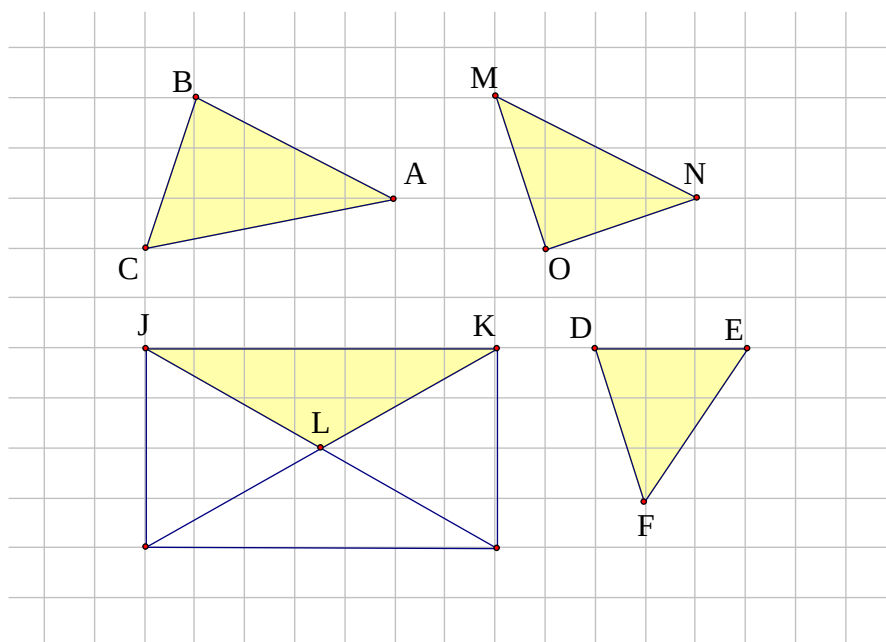
Actividad 1.1.9

- 1) Escribe con tus palabras lo que establece el Teorema de Pitágoras.
- 2) Enuncia los elementos esenciales de la demostración
- 3) Explica, en término de las áreas de los cuadrados del dibujo, por qué $a^2 + b^2 = h^2$.
- 4) ¿A qué tipo de figuras se aplica el Teorema?
- 5) Explica por qué la demostración anterior incluye a **todos** los triángulos rectángulos.

 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

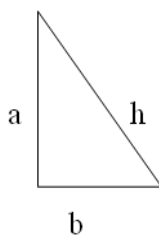
EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. ¿Cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos? Usa el Teorema de Pitágoras.



2. Imagina que tu primo te llama por teléfono desde Pachuca y te dice que ha dibujado un triángulo rectángulo. Sin embargo, no está seguro de que sea rectángulo pues no tiene un transportador, sólo tiene una regla. Escribe un diálogo con tu primo en donde le expliques cómo verificar si el triángulo que dibujó es rectángulo, o no, utilizando únicamente la regla.

3. Encuentra el valor que falta para las medidas dadas en el siguiente triángulo rectángulo:



- 1) $a=2$, $b=4$, $h=?$ 2) $a=9$, $b=?$, $h=15$ 3) $a=?$, $b=8$, $h=10$ 4) $a=7$, $b=?$, $h=20$

4. Encuentra la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyos lados miden:

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) r

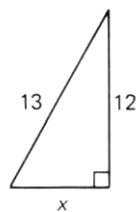
5. Encuentra la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden:

- (a) 1 y 2 (b) 3 y 5 (c) 4 y 7 (d) r y $2r$ (e) $3r$ y $5r$ (f) $4r$ y $7r$

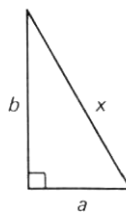
6. Encuentra la longitud de x en cada uno de los siguientes diagramas:



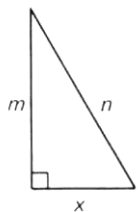
(a)



(b)



(c)



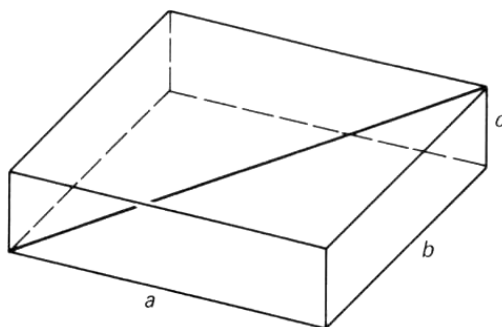
(d)

7. Encuentra la longitud de la diagonal de un cubo cuyos lados miden:

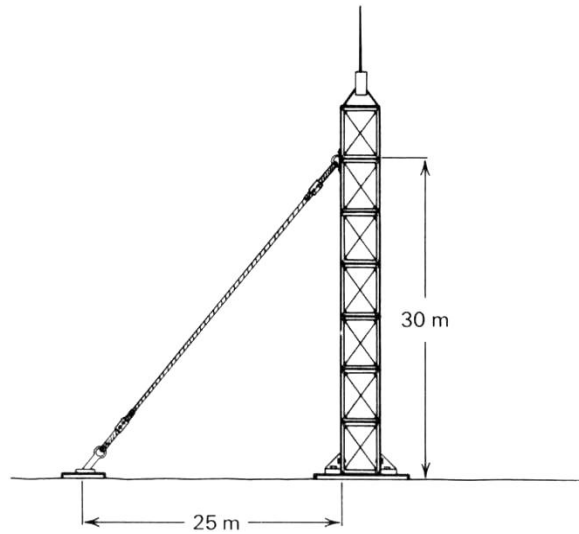
- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) r

8. Encuentra la longitud de la diagonal de un sólido rectangular cuyos lados a , b y c tienen longitudes:

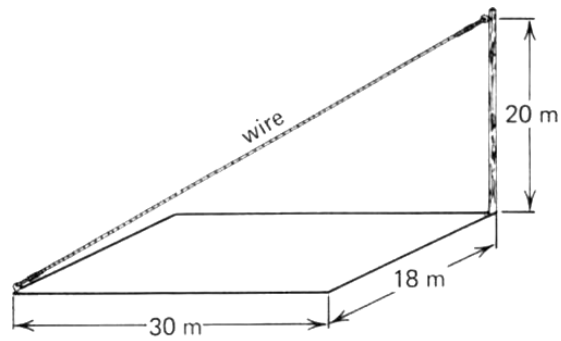
- (a) 3, 4, 5 (b) 1, 2, 4 (c) 1, 3, 4 (d) a , b , c (e) ra , rb , rc



9. Una torre de telecomunicaciones debe ser anclada al piso utilizando cables de acero desde 30 m sobre el piso a estacas que se encuentran a 25 m de la base. ¿Cuál es la longitud de los cables?



10. Un poste de 20 m de alto se encuentra sostenido en una esquina de un campo por un cable que se extiende hasta la esquina opuesta del campo como se muestra en la figura:



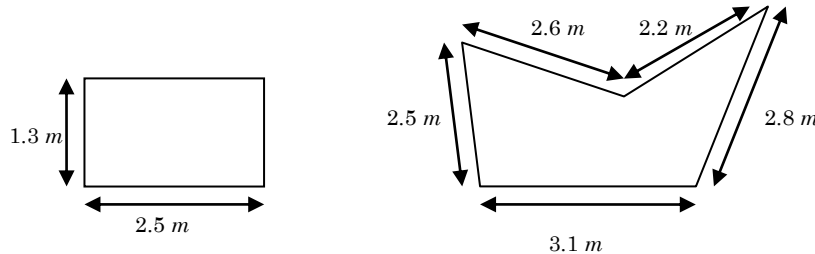
¿Cuál es la longitud del cable?

11. Un cuadrado tiene un área de 144 cm^2 . ¿Cuánto mide su diagonal?

1.2 Definición de perímetro

Actividad 1.2.1

En una casa hay dos ventanas con las siguientes formas y medidas:



Si en navidad queremos adornarlas con luces rodeando su contorno, ¿cuántos metros de cable necesitaremos para cada ventana?

Actividad 1.2.2

Las medidas 7.6 m y 13.2 m que encontraste en la actividad anterior son, justamente, los *perímetros* de las figuras geométricas que forman las ventanas.

- 6) Describe cómo calculas el perímetro de una figura geométrica.
- 7) Encuentra otros ejemplos donde sea necesario conocer el perímetro de alguna figura geométrica.

Actividad 1.2.3

Usa tu juego de geometría y dibuja:

- 1) Un rectángulo de 20 cm de perímetro.
- 2) Un triángulo de 12 cm de perímetro.

Actividad 1.2.4

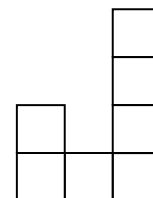
Con siete fichas cuadradas del mismo tamaño, Julia armó la inicial de su nombre. Calcula el perímetro de la letra J si cada lado de una ficha mide:

1 cm, $P = \underline{\hspace{2cm}}$

0.4 cm, $P = \underline{\hspace{2cm}}$

2 cm, $P = \underline{\hspace{2cm}}$

12 cm, $P = \underline{\hspace{2cm}}$



- 1) Explica cómo calcularías el perímetro de la letra si sabes la medida de cada lado del cuadrado.
- 2) Si m es la medida, escribe la fórmula que te permite calcular el perímetro.
- 3) Si el perímetro de la letra es igual a 40 cm , ¿cuánto mide el lado de cada ficha?
- 4) ¿Cuál es la fórmula que te permite calcular la medida del lado de la ficha si conoces el perímetro de la letra?

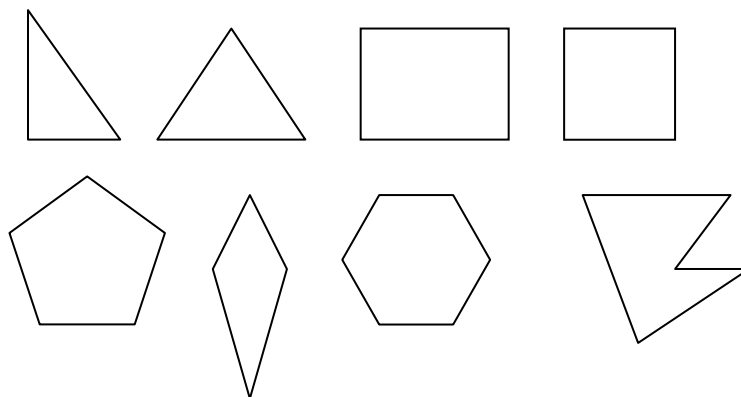
Actividad 1.2.5

Escribe, con tus propias palabras, qué es y cómo se puede medir el perímetro de una figura geométrica.

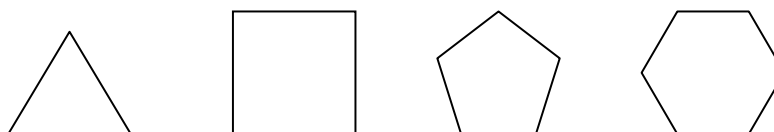
✎ *Revisa este ejercicio con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Un polígono regular es aquel en el que todos sus lados miden lo mismo. Usa esta definición e indica cuáles de los siguientes polígonos son regulares y cuáles no.



2. Escribe la fórmula para calcular el perímetro de cada uno de los siguientes polígonos regulares. Llama L a la longitud del lado de cada polígono.



3. ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro de un polígono regular de n lados de longitud L ? Explica lo siguiente:

1) ¿Qué valores puede tomar n ?

2) ¿Qué valores puede tomar L ?

4. ¿Qué le sucede al perímetro de un cuadrado si se duplica la medida de sus lados? Responde sin hacer cuentas.

a) no cambia b) se duplica c) se cuadriplica d) se multiplica por 8

1) Dibuja dos cuadrados que representen la situación indicada y verifica tu resultado.

2) ¿Son el perímetro de un cuadrado y el valor de su lado magnitudes directamente proporcionales? ¿Por qué?

5. Dibuja un rectángulo de 12 cm de perímetro.

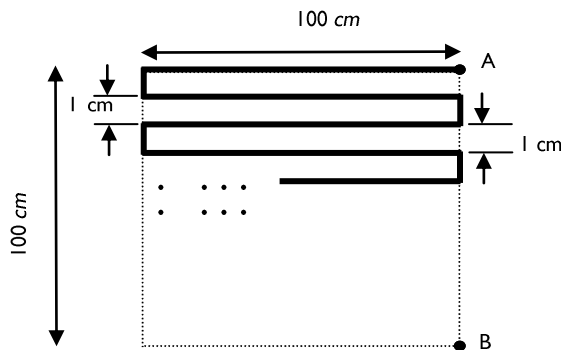
1) ¿Hay una sola posibilidad?

2) Si el rectángulo tiene un lado de $2\frac{1}{2}$ cm ¿Cuánto miden los otros lados? Explica cómo haces para encontrarlo.

6. Con una cuerda de 30 cm de longitud se construyó un cuadrado. Como el trozo que sobraba tenía la misma longitud que un lado, se colocó encima del primer lado ¿cuál es el perímetro del cuadrado?

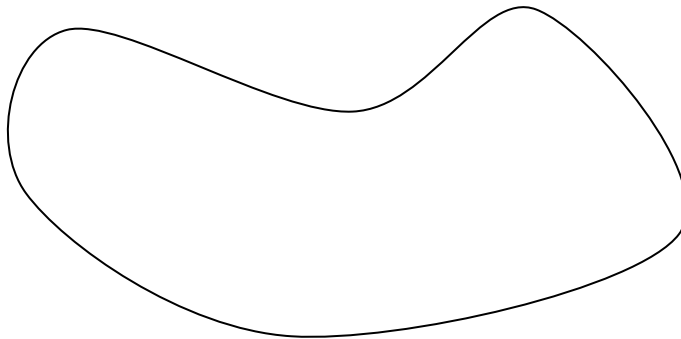


7. Observa la siguiente figura. ¿Cuál es la distancia que recorre una hormiga para ir del punto A al punto B? (La figura no está hecha a escala).



Actividad 1.2.6

- 1) En la actividad 1.2.5 escribiste cómo se puede medir el perímetro de una figura geométrica. Usa tu definición para medir el perímetro de la siguiente figura:



- 2) ¿Te sirvió tu definición para medir el perímetro de la figura? ¿Por qué?
- 3) Si no te sirvió, ¿se te ocurre otra manera de medir el perímetro de la figura? Explica cómo y mídelo.

 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

En este curso estudiaremos una definición operacional de perímetro. Las definiciones operacionales, que se usan en todas las ramas de la ciencia, se caracterizan por describir cómo medir lo que estamos definiendo (en este caso el perímetro). Aunque podemos dar varias definiciones de perímetro, usaremos una definición operacional de perímetro, la cual nos dice como medir el perímetro de una figura cualquiera.

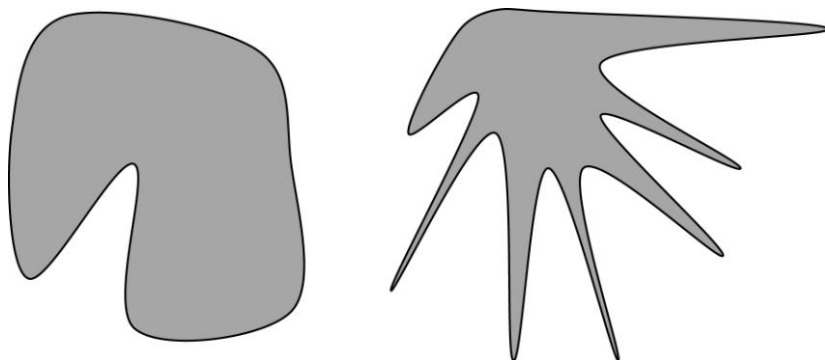
Definición operacional de perímetro. *Para determinar el perímetro de una figura se pueden seguir los siguientes pasos:*

- 1) *Bordear todo el contorno de la figura con una cuerda.*
- 2) *Medir la longitud de la cuerda (por ejemplo con una regla).*
- 3) *El perímetro de la figura coincide con la longitud de la cuerda.*

A partir de este momento, y durante toda el Capítulo de Perímetro, es importante que traigas una cuerda y una regla a clase.

Actividad 1.2.7

- 1) Sin hacer ninguna medición ¿Cuál de las siguientes figuras piensas que tiene mayor perímetro? ¿Por qué?



- 2) Usa la definición operacional de perímetro y determina el perímetro de las figuras. Verifica la predicción que hiciste en el inciso anterior.

Actividad 1.2.8

Rodrigo dice que el perímetro de una figura es la suma de la longitud de todos sus lados ¿Coincide esta definición con la que se dio anteriormente? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

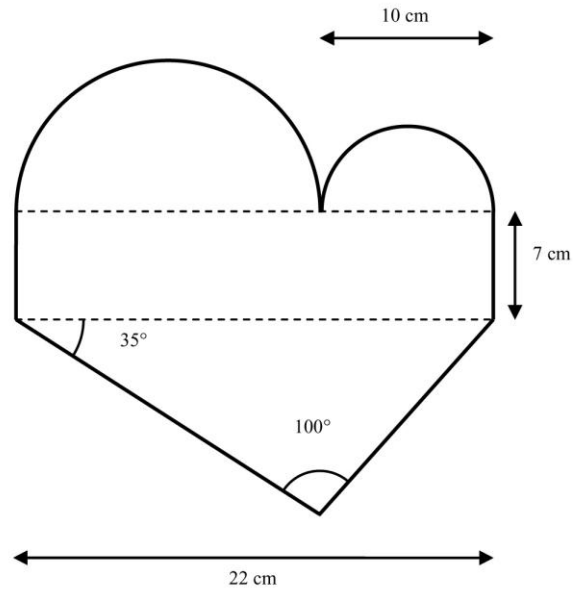
Actividad 1.2.9

- 1) Escribe, en tu bitácora, la definición operacional de perímetro que dimos antes.
- 2) La definición de Rodrigo (el perímetro de una figura es la suma de la longitud de todos sus lados) también es una definición operacional. Pero ésta sólo funciona cuando las figuras son polígonos (es decir, cuando todos sus lados son rectos). Explica por qué en este caso ambas definiciones funcionan.
- 3) Si queremos medir el perímetro de una figura grande, como por ejemplo el perímetro del terreno de la Universidad ¿es factible usar la definición operacional que dimos?

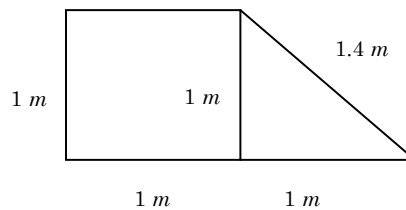
 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

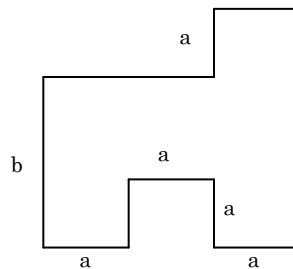
1. Dibuja tres figuras distintas de 30 cm de perímetro cada una.
2. Dibuja en tu bitácora una figura con las siguientes características y mide su perímetro.



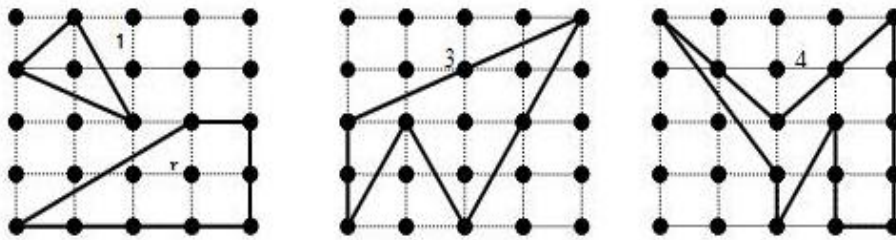
3. Daniel dice que el perímetro de la figura es 7.4 m, ya que al perímetro del cuadrado, que es 4 m, le sumamos el del triángulo, que es 3.4 m. ¿Es correcto su razonamiento? Explica tu respuesta.



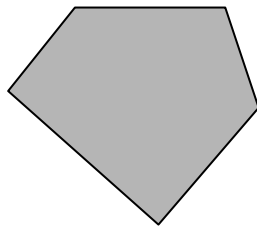
4. El diagrama corresponde al plano de una habitación. Las paredes son perpendiculares unas a otras. Si $a = 2\text{ m}$ y $b = 7\text{ m}$, determina el perímetro de la habitación.



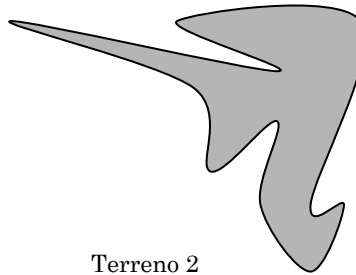
5. Determina el perímetro de las figuras indicadas.



6. Las siguientes figuras representan dos terrenos. Si la escala es 1:1500 (1 cm de la figura corresponde a 1500 cm reales), determina el perímetro de ambos terrenos.

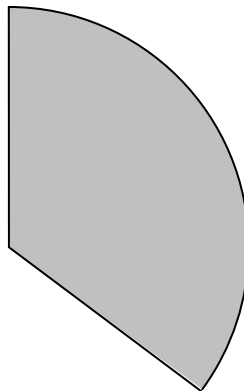


Terreno 1

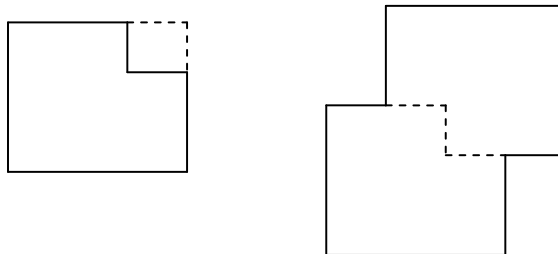


Terreno 2

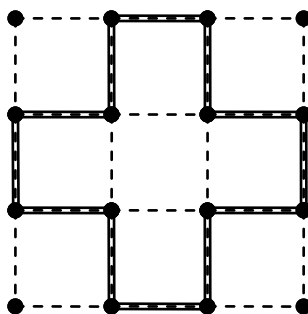
7. El terreno que se muestra en la figura tiene un perímetro real de 6.7 km ¿Cuál es la escala usada?



8. La figura A se obtiene al cortar en una de las esquinas de un cuadrado de 24 cm de perímetro, un cuadradito de 8 cm de perímetro. Con dos iguales a A se arma la figura B. ¿Cuál es el perímetro de la figura B?



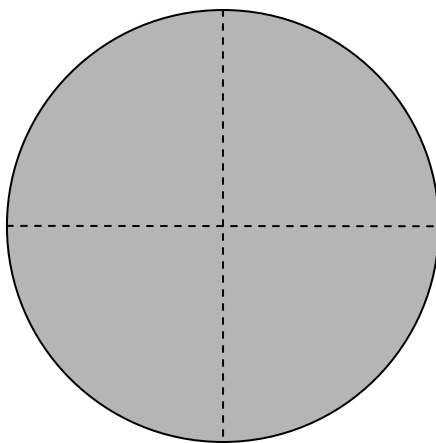
9. ¿Cuántas figuras de perímetro 12 puedes dibujar en el siguiente geoplano de 4×4 ? En la figura te mostramos un ejemplo.



1.3 Perímetro del círculo

Actividad 1.3.1

Mide el perímetro del círculo de la siguiente figura (usa la definición operacional). Tal vez necesites un hilo y una regla.



Actividad 1.3.2

Utiliza un compás y dibuja diez círculos de diferentes diámetros. Aplica la definición operacional de perímetro y completa la siguiente tabla:

Medida del diámetro d (cm)	Medida del perímetro P (cm)	Resultado de la división $\frac{P}{d}$
2		
4		
6		
...		
18		
20		

Observa los resultados que obtuviste de $\frac{P}{d}$ para todos los círculos y compáralos con los que obtuvieron tus compañeros ¿Qué observas?

Predice cuál crees que será el valor aproximado de $\frac{P}{d}$ para algún otro círculo. Haz la prueba.

Los griegos hicieron estas pruebas con cientos de círculos y encontraron que el resultado de dividir el perímetro entre el diámetro siempre les daba aproximadamente el mismo número. A este número lo llamaron π . Ahora sabemos que para todo círculo el cociente $\frac{P}{d}$ nos da π . Esto lo podemos reescribir como $P = \pi \times d$. (Si $P \div d = \pi$, entonces $P = \pi \times d$)

Actividad 1.3.3

- 1) Con base en tus mediciones ¿Cuál es el valor de π ? ¿es un valor exacto o una estimación? Explica.
- 2) ¿Entre que valores estimas que está? ¿Cómo mejorarías tu estimación?

 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

De ahora en adelante utilizaremos el valor de $\pi=3.14$, pero ¿cómo sabemos cuál es el valor exacto de π ? En el capítulo que sigue discutiremos otras formas de estimar el valor de π .

Actividad 1.3.4

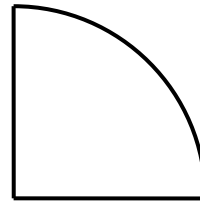
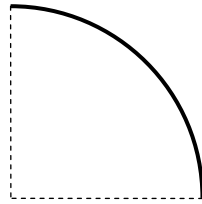
Como vimos, la fórmula para el perímetro del círculo es $P = 2\pi r = \pi d$, donde r es su radio y d su diámetro (el radio es la mitad del diámetro).

Regresa a la tabla que realizaste en la actividad 1.3.2. Haz uso de las mediciones de los diámetros y la fórmula para el perímetro para obtener los perímetros de por lo menos cinco de los círculos que dibujaste

- 1) ¿Coinciden los resultados que obtuviste utilizando la fórmula y los que obtuviste aplicando la definición operacional de perímetro?
- 2) Si hay diferencias ¿cómo las explicarías? ¿cuál de los dos valores para el perímetro te parece más confiable? Explica.

Actividad 1.3.5

- 1) Mide (con una cuerda y una regla) la longitud de la siguiente curva y de la siguiente figura:



- 2) Ahora mide el radio del círculo y determina las longitudes usando la fórmula de perímetro del círculo ¿coinciden tus resultados?

Actividad 1.3.6

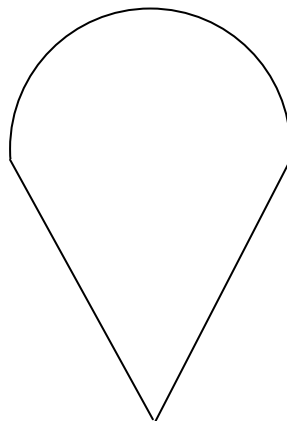
Explica qué nos dice la fórmula $P = 2\pi r = \pi d$ y cómo esta se relaciona con la definición operacional de perímetro.

 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

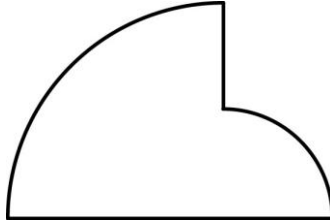
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- I. En este problema mediremos el perímetro de dos formas diferentes:

- 1) Usa una regla una cuerda y mide el perímetro de la siguiente figura:

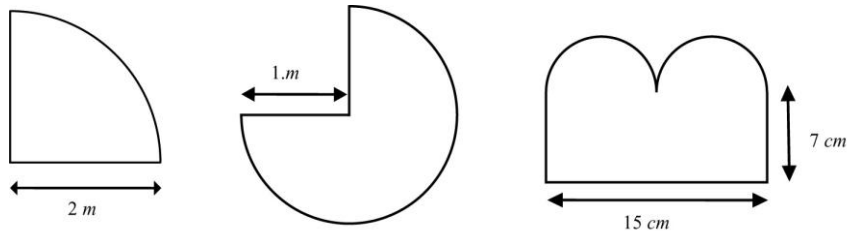


- 2) Ahora calcula el perímetro de una manera alternativa. Con una regla mide las longitudes que consideres necesarias y calcula el perímetro usando la fórmula del perímetro de un círculo.
- 3) Ahora, con la regla y la cuerda, mide el perímetro de:



- 4) Con una regla mide las longitudes que consideres necesarias y calcula el perímetro usando la fórmula del perímetro de un círculo.

3. Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

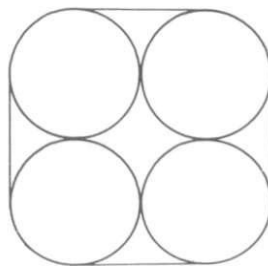


4. Al enrollar una cuerda de 3 m en un círculo da 2 vueltas exactas ¿Cuál es el diámetro del círculo?

- 1) Para enrollar la misma cuerda en otro círculo, ésta da 4.6 vueltas ¿Cuál es el diámetro del nuevo círculo?

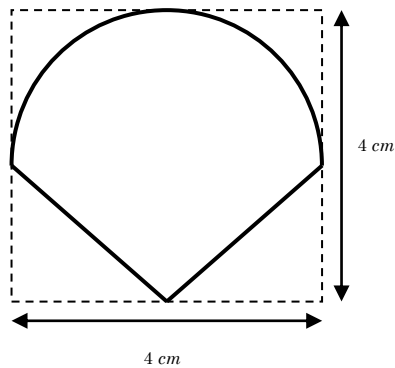
5. La rueda de mi carro tiene un diámetro de 45cm. Si recorro 100km ¿cuántas vueltas dio la rueda?

6. Cuatro latas de 12 cm de radio tienen que ser amarradas con una liga como se muestra en la figura. ¿Cuánto debe de medir la liga?



7. Un coche se mueve a 60 km/hr. Cada llanta tiene un radio de 0.4 m. ¿Cuántas vueltas dará la llanta en media hora?

8. Determina el perímetro de la siguiente figura:



9. ¿Qué le pasa al perímetro de un círculo si se le duplica el radio? ¿si se triplica? ¿y si se quintuplica? Justifica tu respuesta.

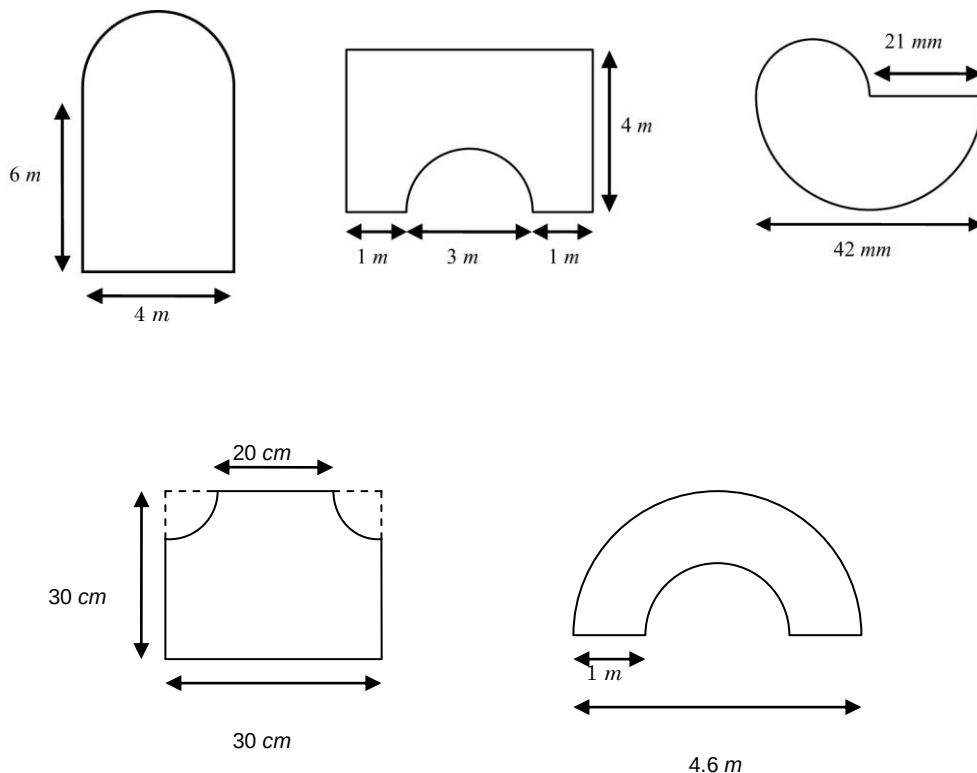
10. ¿Cómo harías para dibujar un hexágono utilizando únicamente regla y compás?

11. Si un círculo tiene un perímetro de 16π . ¿Cuál es el perímetro de un hexágono regular inscrito en su interior? (ayuda: utiliza lo que aprendiste en el problema anterior)

1.4 Perímetro de figuras compuestas

Actividad 1.4.1

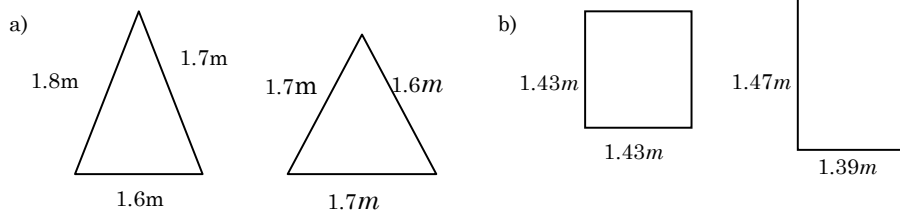
Determina el perímetro de las siguientes figuras.



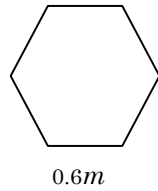
👉 *Revisa este ejercicio con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

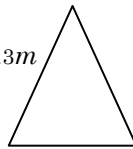
1. Sin usar lápiz, papel ni calculadora, señala en cada inciso cuál de los perímetros de las dos figuras es mayor. En el inciso c, las figuras son un hexágono regular y un triángulo equilátero. Explica tu razonamiento.



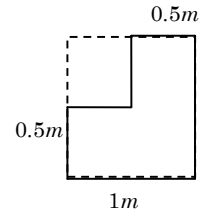
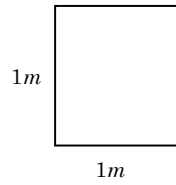
c)



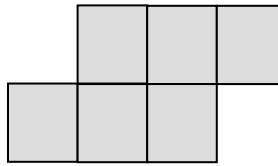
1.3m



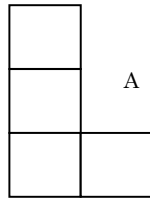
d)



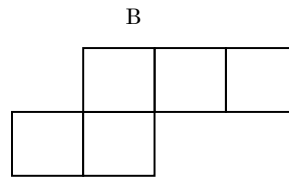
2. La siguiente figura está formada por láminas cuadradas cuyos lados miden 1.5cm ¿cuál será el menor número de láminas que debes agregar para obtener una figura de 24cm de perímetro? Las láminas que agregues deben tener en común con la figura al menos un lado.



3. Las figuras A y B están formadas por cuadrados de 1cm de lado.



A



B

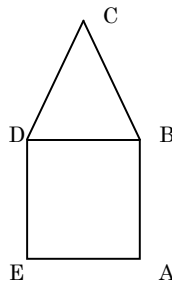
Con las figuras superpuestas, se arman nuevas figuras. ¿Cuáles son las figuras de mayor y menor perímetro que se pueden armar? Explica tu razonamiento.

4. Dibuja, por lo menos tres figuras distintas, que tengan el perímetro indicado en cada caso.

a) $P = 10m + \pi(3m)$

b) $P = 8m + \frac{2\pi(lm)}{2}$

5. El cuadrado ABDE y el triángulo isósceles BCD tienen igual perímetro. El polígono ABCDE tiene 72cm de perímetro ¿Cuál es la longitud del segmento BC? ¿y de AB?

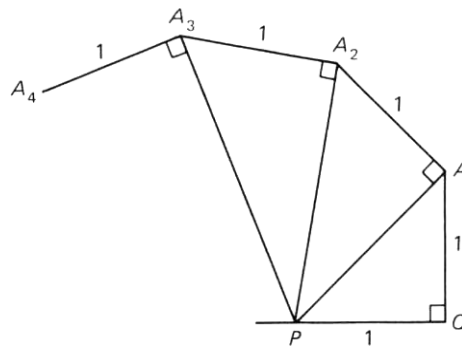


PROBLEMAS DE RETO

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide el doble que el otro cateto. El área del triángulo es de 72 cm^2 . ¿Cuánto mide la hipotenusa?

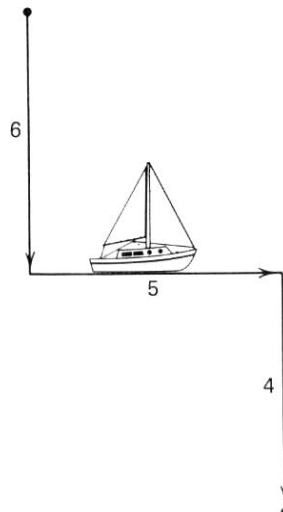
2. En la figura de abajo, el triángulo rectángulo PQA_1 tiene dos catetos de longitud 1.

- 1) ¿Cuánto mide la hipotenusa PA_1 ?
- 2) El segmento A_1A_2 también mide una unidad y es dibujado perpendicular al segmento PA_1 .
- 3) El segmento A_2A_3 mide 1 y es dibujado perpendicular al segmento PA_2 , etc.
- 4) ¿Cuánto mide el segmento PA_2 ?
- 5) ¿Cuánto mide el segmento PA_3 ?
- 6) ¿Cuánto mide el n -ésimo segmento PA_n ?



3. Un barco viaja 6 km hacia el sur, 5 km hacia el este, y por último 4 km hacia el sur.

- 1) ¿A qué distancia se encuentra de su punto de partida? (¡La respuesta no es 15 km!) Puedes suponer que el camino que siguió el barco es como se muestra en el diagrama que sigue, y que yace en sobre un plano.



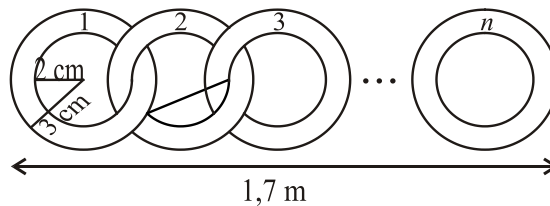
- 2) Si el barco saliera del Polo Norte (en la Tierra, es decir no sobre un plano) ¿Cuál sería la distancia? (Nota: este problema requiere que pienses un poquito más)

4. Un triángulo rectángulo ABC tiene catetos que miden 3 y 4.

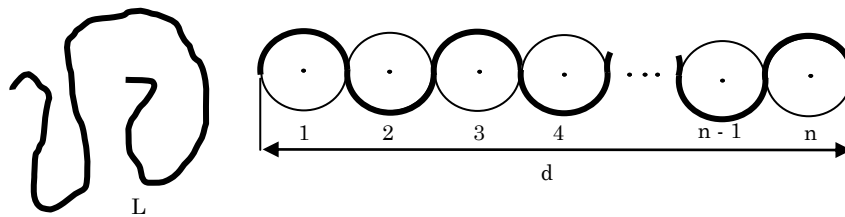
- 1) Imagina que duplicamos el largo de cada uno de los catetos, de manera que ahora miden 6 y 8. ¿Cuánto mide la hipotenusa en este caso?
- 2) Ahora triplica la longitud de los catetos originales. ¿Cuánto mide la hipotenusa en este caso?
- 3) Supón que multiplicamos las longitudes de los catetos originales por un número c (c es un número mayor que cero), de modo que ahora miden $3c$ y $4c$. ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?
- 4) Muestra que tu conclusión en la parte (d) es cierta. Explica claramente
- 5) Haz uso del resultado anterior para calcular mentalmente las longitudes de las hipotenusas de los siguientes triángulos rectángulos cuyos catetos miden:

(i) 300 y 400 (ii) 18 y 24 (iii) 27 y 36

5. Si entrelazamos unos anillos, como se muestra en la siguiente la figura. La longitud de la cadena así construida es igual a 1.7 m . ¿Cuántos anillos n se utilizaron?



6. La cuerda L se enrolla en n círculos, según la figura:



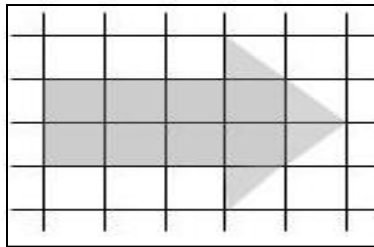
Si $d = \frac{12}{\pi} \text{ cm}$ y $n = 53$ ¿Cuál es la longitud de la cuerda L ?

1.5 Autoevaluación

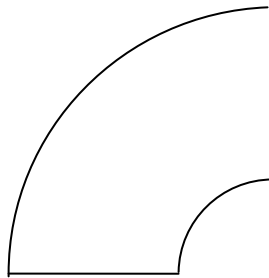
- 1 Describe el conjunto de actividades que te llevaron a poder entender en qué tipos de triángulos se puede aplicar el teorema de Pitágoras.
- 2 Explica cómo se puede medir el perímetro de una figura cualquiera (definición operacional).
- 3 Describe el conjunto de actividades que te llevaron a poder entender cuando se aplica, y cuando no, la siguiente definición operacional: El perímetro de una figura es la suma de la longitud de todos sus lados.
- 4 ¿Qué significa que el perímetro de una figura sea de 20 m?
- 5 Determina el perímetro de la figura si cada lado del cuadrado mide:

1 cm $P = \underline{\hspace{2cm}}$

2 m $P = \underline{\hspace{2cm}}$

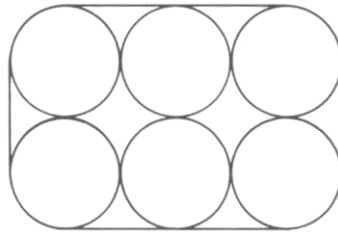


- 6 Construye una figura cuyo perímetro sea $P = 6 + 3\pi$ centímetros.
- 7 Mide el perímetro de la siguiente figura utilizando una regla y una cuerda.

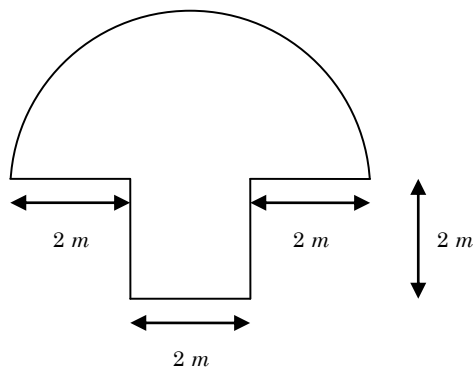


Calcula el perímetro de otra manera. Con una regla, mide las longitudes que consideres necesarias y calcula el perímetro usando la fórmula del perímetro de un círculo.

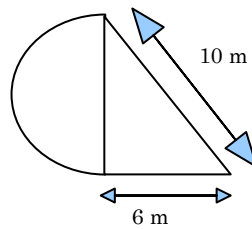
- 8 Seis latas de cerveza son amarradas con una cinta de plástico como se muestra en el dibujo. ¿Cuánto debe medir la cinta si cada lata tiene un diámetro de 6 cm?



- 9 Determina el perímetro de la siguiente figura:



- 10 Determina el perímetro de la siguiente figura.



Objetivos de aprendizaje del capítulo 1

Después de haber terminado este capítulo debes de ser capaz de hacer las siguientes cosas:

- 1 Explica qué dice el teorema de Pitágoras, cuál es su utilidad y en qué tipos de triángulos se puede usar.
- 2 Aplica el teorema de Pitágoras para calcular: 1) la hipotenusa de triángulos rectángulos (cuando conocemos los catetos), 2) algún cateto (cuando conocemos la hipotenusa y el otro cateto), 3) longitudes de segmentos en un geoplano o cuadrícula identificando correctamente el triángulo que se debe usar para tal fin y, 4) Diagonales en sólidos rectangulares.
- 3 Explica por qué es necesaria la demostración del teorema de Pitágoras y en qué consiste.
- 4 Di cuáles son los pasos que hay que seguir para “medir” el perímetro de una figura cualquiera (estos es, da una “definición operacional” de perímetro). De este modo, debes poder medir el perímetro de cualquier figura.
- 5 Justifica, con base en tus observaciones, la fórmula para el perímetro del círculo y explica cómo se define y estima π .
- 6 Explica, con tus propias palabras, la relación que hay entre la “fórmula” para calcular el perímetro de un círculo y la definición operacional de perímetro.
- 7 Resuelve y formula problemas tales como: 1) obtener el perímetro de figuras compuestas; 2) obtener una figura compuesta dada la expresión para calcular el perímetro, etc. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques cómo se fueron resolviendo con las actividades.
- 8 Formula y resuelve problemas como los del final del capítulo (Autoevaluación).

CAPÍTULO 2

Área

El problema de los Cuatro Colores

*Adrián Paenza*¹

Yo sé que ustedes nunca tuvieron que colorear un mapa desde que dejaron la primaria. Y ni siquiera estoy seguro de que en esta etapa de su educación lo hayan hecho. Es más, no creo que los niños de hoy tengan que colorear mapas "a mano", aunque uno nunca sabe.

El hecho es que hay un teorema que tuvo a los matemáticos muchos años sin encontrar la solución. Se trataba de lo siguiente: supongamos que uno tiene un mapa cualquiera, que ni siquiera tiene que corresponder con la realidad.

La pregunta es: "¿cuántos colores hacen falta para colorearlo?". Si: ya sé. Uno tiene entre sus "pinturitas", o en la computadora, muchísimos colores. ¿Por qué preguntarse cuántos colores distintos son necesarios si uno puede usar muchos más de los que necesita? ¿Para qué podría servir calcular el número máximo de colores a usar? Y en todo caso, ¿qué tiene que ver el número cuatro?

La Conjetura de los Cuatro Colores surgió de la siguiente manera: Francis Guthrie era un estudiante de universidad en Londres. Uno de sus profesores era Augustus De Morgan. Francis le mostró a su hermano Frederick - que también había sido estudiante de De Morgan- una conjetura que tenía con respecto a la coloración de unos mapas y como no podía resolver el problema le pidió a su hermano que consultara al renombrado profesor.

De Morgan, quien tampoco pudo encontrar la solución, le escribió a Sir William Rowan Hamilton, en Dublín, el mismo día que le hicieron la pregunta, el 23 de octubre de 1852:

Un estudiante me pidió que le diera un argumento sobre un hecho que yo ni siquiera sabía que era un hecho, ni lo sé aún ahora. El estudiante dice que si uno toma una figura (plana) cualquiera y la divide en compartimentos pintados con diferentes colores, de manera tal que dos adyacentes no tengan un color en común, entonces él sostiene que cuatro colores son suficientes.

¹ Paenza, Adrián. *Matemáticas... ¿estás ahí?, sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina, 2005, págs. 173-177.

Hamilton le contestó el 26 de octubre de 1852 y le dijo que no estaba en condiciones de resolver el problema. De Morgan continuó pidiendo asistencia a la comunidad matemática, pero nadie parecía encontrar la respuesta. Cayley, por ejemplo -uno de los matemáticos más famosos de la época- enterado de la situación, planteó el problema a la Sociedad de Matemática de Londres, el 13 de junio de 1878, y preguntó si alguien había resuelto la Conjetura de los Cuatro Colores.

El 17 de julio del siguiente año, Alfred Bray Kempe anunció en la revista *Nature* que tenía una demostración de la Conjetura. Kempe era un abogado que trabajaba en Londres y que había estudiado matemática con Cayley en Cambridge.

Cayley le sugirió a Kempe que enviara su teorema al *American Journal of Mathematics*, donde fue publicado en 1879. A partir de ese momento, Kempe ganó un prestigio inusitado y su demostración fue premiada cuando lo nombraron Miembro de la Sociedad Real Fellow of the Royal Society en la que actuó como tesorero por muchísimos años. Es más; lo nombraron "Caballero de la Reina" en 1912.

Kempe publicó dos pruebas más del ahora Teorema de los Cuatro Colores, con versiones que mejoraban las demostraciones anteriores.

Sin embargo, en 1890, Percy John Heawood encontró errores en las demostraciones de Kempe. Si bien mostró por qué y en dónde se había equivocado Kempe, Heawood probó que con cinco colores alcanzaba para colorear cualquier mapa.

Kempe aceptó el error ante la sociedad matemática londinense y se declaró incompetente para resolver el error en la demostración.

Todavía en 1896, el famoso Charles De la Valise Poussin encontró también el error en la demostración de Kempe, ignorando aparentemente que Heawood ya lo había encontrado.

Heawood dedicó sesenta años de su vida a colorear mapas y a encontrar potenciales simplificaciones del problema -la más conocida dice que si el número de aristas alrededor de cada región es divisible entre 3, entonces el mapa se puede colorear con cuatro colores-, pero no pudo llegar a la prueba final.

El problema seguía sin solución. Muchos científicos en el mundo le dedicaron buena parte de sus vidas a probar la Conjetura sin suerte. Y obviamente, hubo mucha gente interesada en probar lo contrario, es decir, encontrar un mapa que no se pudiera colorear con cuatro colores.

En 1976 la Conjetura tuvo solución y paso a ser, nuevamente, el Teorema de los Cuatro Colores. La demostración corrió por cuenta de Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes con el advenimiento de las computadoras lograron probar el resultado. Ambos trabajaban en la Universidad de Illinois en Urbana, en la localidad de Champaign.

Usaron más de 1200 horas las computadoras más rápidas que había en la época para poder demostrar la Conjetura. Tan es así, que el Teorema de los Cuatro Colores es uno de los primeros casos en la historia de la matemática en donde la computadora ha tenido una incidencia tan grande que permitió que un problema que venía evadiendo a los matemáticos durante más de un siglo fuera resuelto.

Naturalmente, la demostración trajo gran desazón en el mundo de la matemática, no porque se esperara que el resultado fuera falso -en realidad, todo lo contrario- sino porque era el primer caso en donde la máquina -en este caso, la computadora- estaba superando al hombre. ¿Cómo no poder encontrar una demostración mejor? ¿Cómo no poder encontrar una demostración que no dependiera de un agente externo?

Es que los cálculos más optimistas establecen que, para poder comprobar lo que hicieron Appel y Haken "a mano", una persona que le dedicara 60 horas a la semana, necesitaría cien mil años para cumplir con la misma tarea.

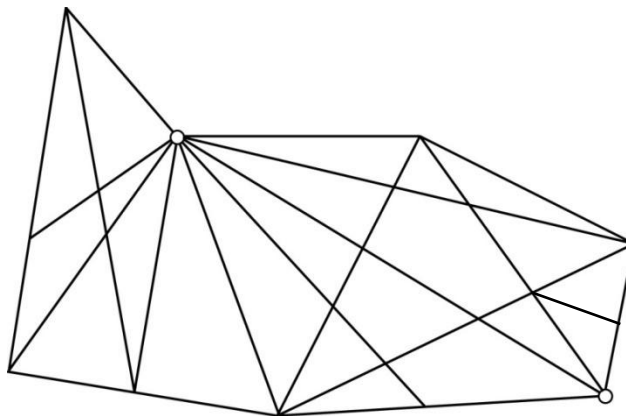
Los detalles de la demostración fueron publicados en dos artículos que aparecieron en 1977. Y lo notable de esto fue que: Los seres humanos, dos en este caso, lograron reducir el problema a casos, muchos casos, que quizás hubieran tomado varias vidas para ser comprobados. Las computadoras hicieron el resto, pero lo que quiero enfatizar es que sin los seres humanos las computadoras no hubieran sabido qué hacer (ni para qué).²

² Hay mucha literatura escrita sobre este tema, pero quiero recomendar alguna:

- 1) http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_four_colour_t-theorem.html
- 2) <http://www.cs.uidaho.edu/~casey931/mega-math/gloss/math/4ct.html>
- 3) *Four Colors Suffice: How the Map Problem was Solved*. Libro escrito por Robin Wilson y publicado por Penguin Group en 2002.
- 4) *The Four-Color Problem*, de Oystein Ore (Academic Press, junio de 1967).
- 5) <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>
- 6) http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Thefour_colour_theorem.html

Actividad 2.0.1

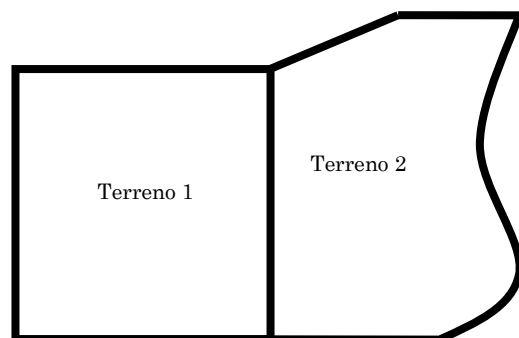
- 1) Enuncia el teorema de los cuatro colores.
- 2) Pinta la siguiente figura de acuerdo al teorema de los cuatro colores.



2.1 Definición de área

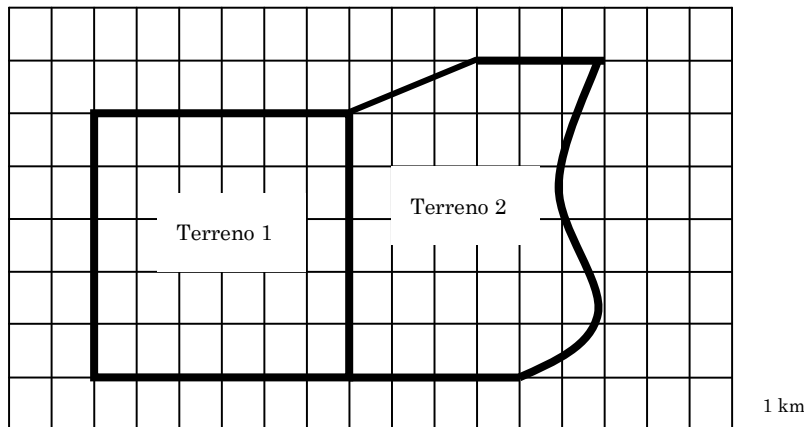
Actividad 2.1.1

Carlos quiere comprar un terreno. El agente de ventas le enseña dos. Ambos cuestan lo mismo y la calidad de la tierra es igual en todos los sentidos, por lo que decide comprar el más grande. Carlos consigue una fotografía aérea de los terrenos, la cual se muestra en la siguiente figura. Plantea, con tu grupo, un método para determinar, con base en la fotografía, cual terreno es más grande.



Actividad 2.1.2

Ismael tomó un lápiz y una regla y cuadriculó la fotografía, como se muestra en la figura ¿Podrías decir ahora cual terreno es mayor?



La mejor manera de comparar el tamaño de los dos terrenos es llenar cada uno de ellos con cuadrados idénticos y contar el número de cuadrados que caben dentro de los bordes de los terrenos. El terreno al que se ajustan más cuadrados es el más grande.

Antes de dar una definición operacional de área, vamos a definir lo que es un cuadrado estándar. Un cuadrado estándar es aquel cuyo lado mide uno (1cm, 1m, 1mm, etcétera.)

Si los lados del cuadrado estándar miden 1 km, entonces decimos que el cuadrado estándar tiene un área de 1 km^2 , y a ese cuadrado lo llamamos “kilómetro cuadrado”. Si miden 1 m de lado, entonces el cuadrado estándar tiene un área de 1 m^2 (y se le llama “metro cuadrado”).

Definición operacional de área: *Para medir el área de una figura podemos seguir los siguientes pasos:*

- 1) Ajustar cuadrados estándar dentro de los bordes de la figura.*
- 2) Contar el número de cuadrados estándar que se ajusten dentro de los bordes, estimando la contribución de los cuadrados parciales o fragmentados.*
- 3) El área de la figura es el número de cuadrados estándar que se ajustan a la figura (medida en esas unidades estándar).*

¿Cuál es el área del Terreno 1 si los cuadrados tienen 1 km de lado?

Sigamos los pasos de la definición operacional:

- 1) Ya están ajustados en la figura.
- 2) El número de cuadrados es 30.
- 3) Como se ajustaron 30 cuadrados estándar y son de 1 km de lado, entonces el área del terreno es 30 km².

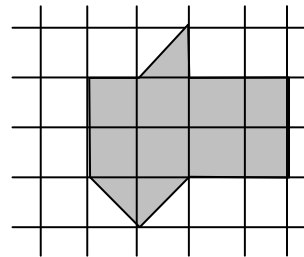
Actividad 2.1.3

- 1) ¿Qué es 1cm²? ¿y 1mm²?
- 2) De qué tamaño elegirías el cuadrado estándar para medir el área de: a) una hoja de papel, b) el terreno de la universidad y c) una moneda de 1 peso.

Actividad 2.1.4

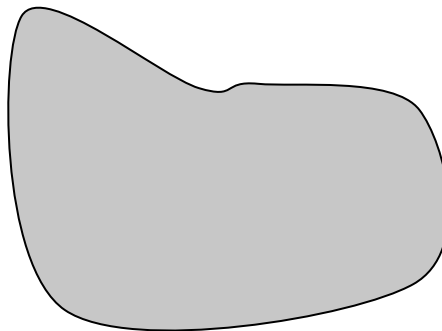
Determina el área de la siguiente figura si los lados de la cuadrícula miden:

1 cm A=____
 1 m A=____
 1 km A=____
 1 dam A=____



Actividad 2.1.5

Copia la siguiente figura en una hoja milimétrica y mide su área (usa la definición operacional de área).



Actividad 2.1.6

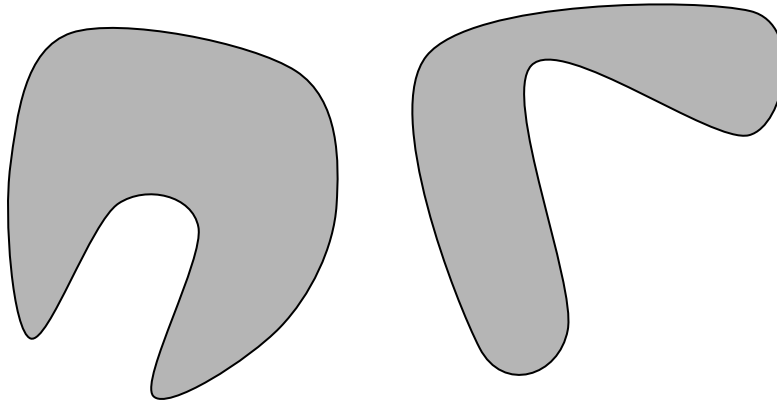
Explica los pasos a seguir para determinar el área de una figura (definición operacional de área). Si a lo largo de las actividades anteriores encontraste alguna información que te pueda ser de utilidad para ampliar la definición, agrégala. (Ayuda: ¿Qué tienes que hacer poder hacer una medición más precisa del área? Explica usando lo que hiciste en la actividad anterior)

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

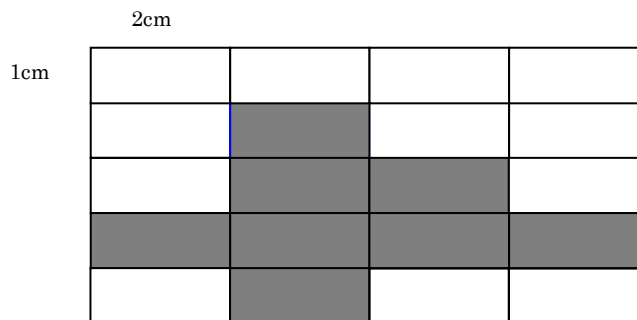
I. Contesta las siguientes preguntas.

- 1) ¿Cuál de las siguientes figuras piensas que tiene mayor área? ¿Por qué? Contesta sin hacer ninguna medición.



- 2) Copia las figuras anteriores en una hoja milimétrica y mide sus áreas (usa la definición operacional de área).
- 3) Verifica la predicción que hiciste en el inciso anterior.

2. ¿Cuál es el área de la siguiente figura?



3. Arturo y Lucía discuten acerca del ejercicio anterior.

Arturo dice que el área de la figura es de 8cm^2 , porque está formada por ocho piezas iguales. Lucía no está de acuerdo. Para ella el área es de 16cm^2 , pero no sabe bien cómo explicarlo-.

¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué?

4. ¿Cuántos milímetros cuadrados hay en un centímetro cuadrado? ¿cuántos centímetros cuadrados caben en un metro cuadrado? Explica.

Actividad 2.1.7

Utiliza la definición operacional de área para determinar el área de:

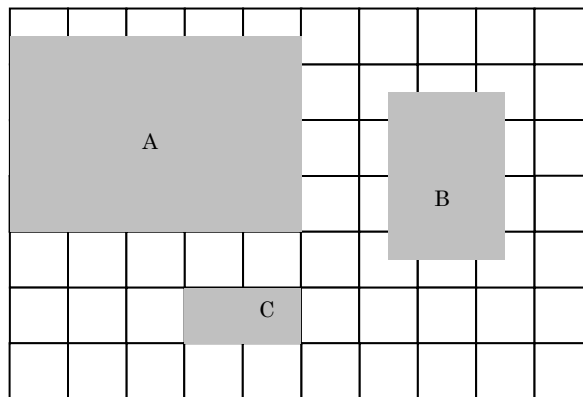
- 1) Un cuadrado de 2 m de lado.
- 2) Un cuadrado de 8 mm de lado.
- 3) Un rectángulo de 3 cm de base y 2 cm de altura.
- 4) Un rectángulo de 6.5 cm de base y 4 cm de altura.
- 5) Un rectángulo de 3.25 cm de base y 7.5 cm de altura.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

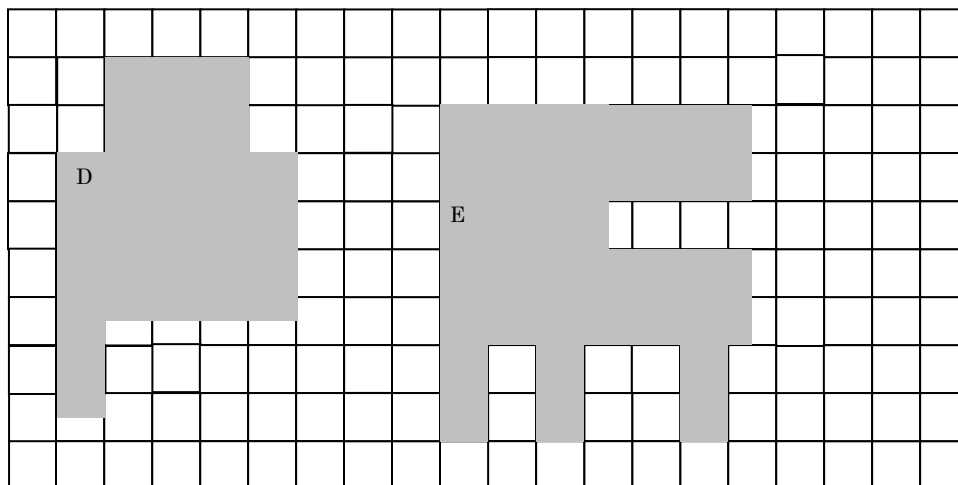
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

I. Utilizando la definición operacional de área determina el área de los siguientes rectángulos.

- I) Considera que la cuadrícula es de 1 cm.

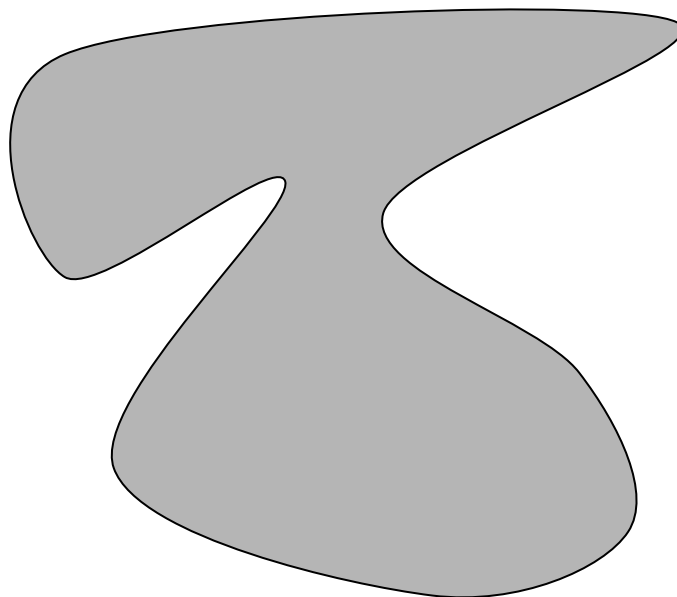


2) Determina el área de las siguientes figuras compuestas:

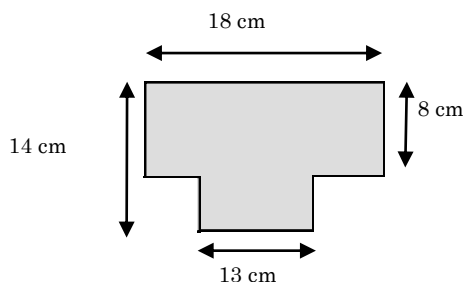


3) ¿Qué relación encuentras entre el área de las figuras compuestas D y E y las áreas de las figuras simples A, B y C?

2. En la siguiente figura se representa el plano de un terreno que está a escala 1:1500 (1cm de la figura corresponde a 1500cm reales). Determina el área del terreno en km^2 .



3. Juan tiene una tableta de chocolate formada con piezas cuadradas de $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. Si él se come algunas piezas de las esquinas, como muestra en la siguiente figura, ¿cuántas piezas de chocolate le quedan a Juan? y ¿cuántas se comió?

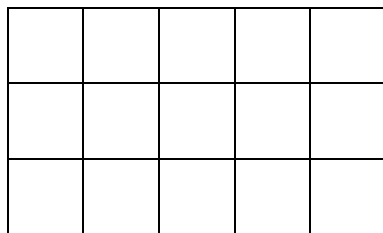


2.2 Cálculo de áreas

Existen muchas situaciones en las que es necesario saber qué tan grande es una superficie: para determinar el tamaño de un terreno, el tamaño de una pared que va a ser pintada, el tamaño del piso que tiene que ser recubierto con mosaico, etc. En todos estos casos la superficie se puede medir a través del siguiente procedimiento:

- 1) Ajusta cuadrados de medida estándar dentro de los bordes de la figura que representa a la superficie.*
- 2) Cuenta el número de cuadrados que se ajusten dentro de los bordes, estimando la contribución de los cuadrados parciales o fragmentados.*

*El número obtenido con este procedimiento se llama **área** de la figura. La definición operacional de **área** no debe confundirse con la fórmula usada para calcularla bajo ciertas circunstancias especiales. Por ejemplo, a muchas personas se les ha dicho que el área es “el largo por el ancho”. Esto es generalmente falso. Largo por ancho es sólo una manera rápida de contar cuadrados para el caso particular de los rectángulos y no es válida para otras figuras. El área de una figura siempre se obtiene contando cuántos cuadrados se ajustan dentro de sus bordes, pero para los rectángulos esta cuenta puede hacerse de una manera rápida al multiplicar el largo por el ancho. No siempre es posible encontrar una fórmula que nos permita encontrar fácilmente el área de una figura, pero siempre podemos aplicar la definición operacional. Para algunas figuras particulares podemos encontrar fórmulas que nos simplifiquen el trabajo de contar cuadritos como veremos a continuación.*

Actividad 2.2.1

Usando el rectángulo que aparece a la izquierda como ejemplo, explica por qué la multiplicación del largo por el ancho de un rectángulo da el mismo número que si se cuenta el número de cuadrados que hay dentro de los bordes.

Nota: Lo relevante de este ejercicio es responder por qué multiplicar es lo mismo que contar los rectángulos, no el hecho de que contar y multiplicar te dan el mismo número.

Actividad 2.2.2

Utiliza los resultados de la actividad anterior para justificar las siguiente aseveración: *“La fórmula para el área de un cuadrado es l^2 (donde l es la medida de su lado) y para la del rectángulo es $b \times h$, donde b es la medida de su base y h la de su altura”.*

Actividad 2.2.3

Dos estudiantes discuten como contestaron la actividad anterior:

Estudiante 1: “Yo justifiqué la aseveración anterior de la siguiente manera: Como la definición de área es el número de cuadrados estándar que se pueden ajustar dentro de la figura, primero conté los cuadrados, fueron 15. Después multipliqué la base (5) por la altura (3) y también me dio 15. Como obtuve el mismo número aplicando la definición y multiplicando la base por la altura, esto *justifica* el hecho de que el área de un rectángulo es base por altura”.

Estudiante 2: “¿Cómo puedes estar seguro? Si tuviéramos un rectángulo de 4592 cm de base y 2781 cm de altura ¿Cómo puedes estar seguro que el número de cuadrados estándar (de 1cm de lado) que se ajustan al rectángulo será exactamente 4592×2781 ? La justificación de la fórmula debería poder explicar *por qué* el número de cuadrados estándar que se ajustan a cualquier rectángulo que elijamos se puede obtener multiplicando la base por la altura del mismo”.

¿Con cuál de los estudiantes estás de acuerdo? Explica tu respuesta.

Revisa tu respuesta en la actividad 2.2.2. ¿Podrías sostener tu respuesta ante la observación del estudiante 2? Si es necesario, modifícala.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 2.2.4

Considera la actividad 2.1.7.

- 1) Determina el área de todas las figuras usando la fórmula.
- 2) ¿Se obtiene el mismo valor para el área de las figuras aplicando la definición y aplicando la fórmula?

Actividad 2.2.5

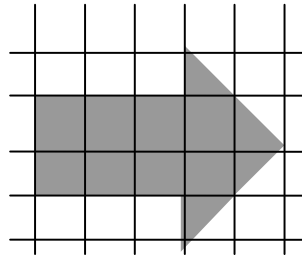
Determina el área de la figura si cada lado de la cuadrícula mide:

1 cm $A = \underline{\hspace{2cm}}$

3 m $A = \underline{\hspace{2cm}}$

3.5 m $A = \underline{\hspace{2cm}}$

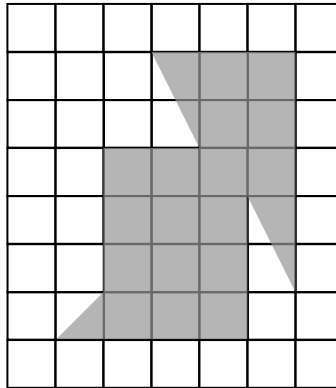
5.7 cm $A = \underline{\hspace{2cm}}$



- 1) Explica, como si fuera una receta, cómo calcularías el área de la figura anterior si sabes la medida del lado del cuadradito.
- 2) Si m es la medida del lado del cuadradito, escribe la fórmula que te permite calcular el área de la figura.
- 3) Si el área de la figura es 40 cm^2 , ¿cuánto mide el lado de cada cuadradito?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Si cada cuadradito mide 0.5 cm de lado ¿Cuál es el área del dibujo?



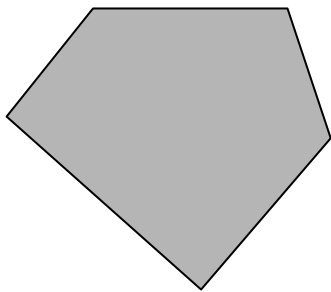
2. Responde sin hacer cuentas.

1) ¿Qué le sucede al área de un cuadrado si se duplica la medida de sus lados?

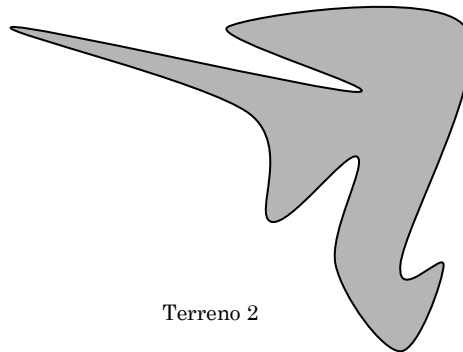
a) no cambia b) se duplica c) se cuadruplica d) se multiplica por 8

2) Dibuja dos cuadrados que representen la situación indicada y verifica tu resultado.

3. Las siguientes figuras representan dos terrenos. Si la escala es 1:1500 (1 cm de la figura corresponde a 1500 cm reales), determina el área y perímetro de ambos terrenos.



Terreno 1



Terreno 2

4. Consigue un mapa de México con escala dada. *Midiendo en el mapa, y considerando la escala*, encuentra la siguiente información:

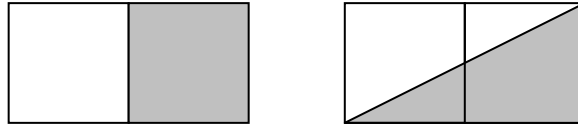
1) Longitud de la frontera norte.

2) Superficie (área) de Chihuahua.

Averigua estos datos en algún atlas o en la red. Compáralos con los que obtuviste midiendo en tu mapa ¿Son iguales? Si no son iguales ¿cómo explicarías las diferencias?

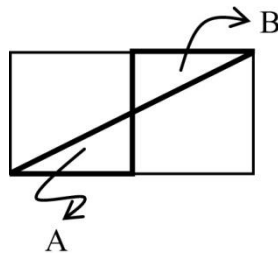
Actividad 2.2.6

¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? Explica.

**Actividad 2.2.7**

Teresa dice que una forma de saber si el área del triángulo es igual a la del cuadrado es la siguiente:

- 1) Dibujar la figura en un papel.
- 2) Recortar el triángulo A.
- 3) Superponer el triángulo A sobre B y ver si coinciden.



Realiza el procedimiento propuesto por Tere y verifica si tu respuesta coincide con la de la actividad 2.2.6.

Actividad 2.2.8

Considera el siguiente triángulo rectángulo:

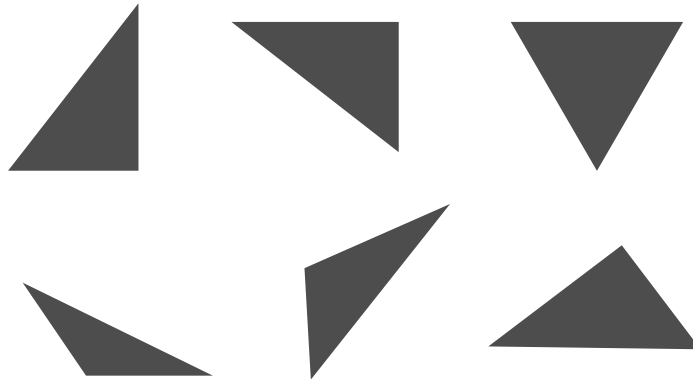


¿Qué relación habrá entre el área del triángulo y el área de un rectángulo con base AB y altura BC? Justifica tu respuesta.

Dado un triángulo la base puede ser cualquiera de los lados. La altura correspondiente a ese lado (es decir, a esa base) es el segmento perpendicular a la recta que contiene al lado y cuyos extremos están comprendidos entre dicha recta y el vértice opuesto a ese lado.

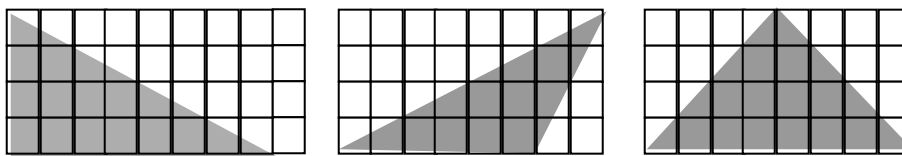
Actividad 2.2.9

Dibuja las tres bases, y sus alturas correspondientes, en cada uno de los siguientes triángulos.



Actividad 2.2.10

Encuentra en cada caso las áreas de los triángulos indicados usando la definición operacional. Considera que la longitud de cada lado de los cuadraditos es igual a 1.



Identifica la base y altura que podrías medir mas fácilmente en cada uno los triángulos anteriores.

¿Qué relación encuentras entre el área de los triángulos y el área de los rectángulos que tienen base y altura que coinciden con los de los triángulos? Explica tu respuesta.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

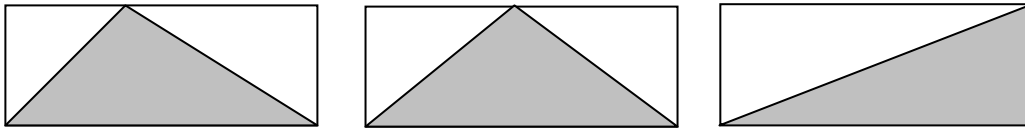
Con base en nuestras observaciones anteriores podemos proponer una fórmula para el área de un triángulo: $\frac{b \times h}{2}$. En esta fórmula, b es la base y h la altura del triángulo.

Actividad 2.2.11

- 1) En los triángulos de la actividad anterior, dibuja una de sus bases y la altura correspondiente.
- 2) Calcula sus áreas aplicando la fórmula y compara tus resultados con los obtenidos en esa actividad aplicando la definición operacional de área.

Actividad 2.2.12

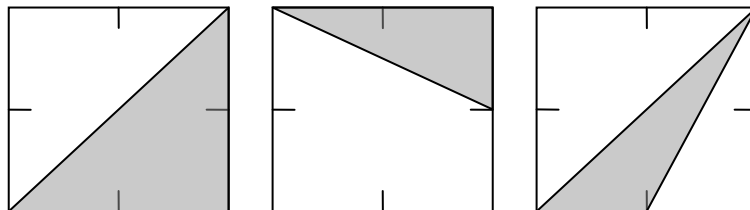
El rectángulo tiene 3cm de base y 1cm de altura. Determina el área de cada triángulo.



¿Qué relación encuentras entre las áreas de los triángulos y el área del rectángulo que los contiene? Explica.

Actividad 2.2.13

El cuadrado tiene 2m de lado. Los puntos indicados representan los puntos medios de los lados. Determina el área de cada triángulo.



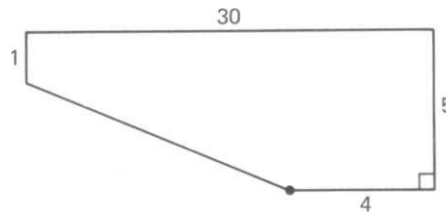
Actividad 2.2.14

¿Cómo harías para justificar la fórmula para el área de un triángulo $\frac{b \times h}{2}$?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

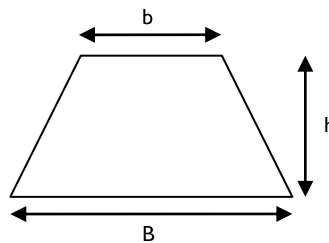
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una alberca tiene 30 metros de largo y 1 metro de profundidad en la parte baja. La parte profunda se extiende por 4 metros y tiene una profundidad de 5 metros. ¿Cuál es el área de la pared de la alberca que se muestra en el dibujo?



2. Escribe un diálogo con tu prima en donde le expliques por qué, para obtener el área de rectángulo, se puede utilizar la fórmula de $b \times h$, y por qué, para obtener el área de un triángulo se puede utilizar la fórmula de $\frac{b \times h}{2}$. (Tal vez te atores con esta última parte, no te preocupes, sólo inténtalo. En la sección de “Problemas de Reto” encontrarás la justificación)

3. El área de un trapecio está dada por la fórmula $\frac{(B+b) \times h}{2}$. Donde “B” es la longitud de la base mayor, “b” la de la base menor y “h” la altura, como se muestra en el dibujo.

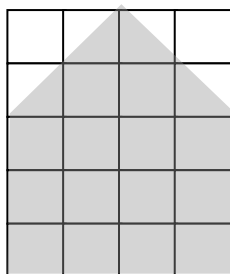


Justifica esta fórmula haciendo uso de la definición operacional de área y las fórmulas que encontramos para las áreas de rectángulos y triángulos. Explica tu razonamiento.

2.3 Área de figuras compuestas

Actividad 2.3.1

- 1) Determina el área de la siguiente figura usando la definición operacional (tomar como la longitud de cada lado 1 cm).



- 2) La figura está formada por un rectángulo y un triángulo ¿Es el área de la figura la suma del área del triángulo y el área del rectángulo? ¿Por qué?
- 3) A continuación presentamos los argumentos de dos estudiantes:

Pedro: “El área de la figura es la suma del área del triángulo y del rectángulo simplemente porque la figura está formada por un rectángulo y un triángulo”.

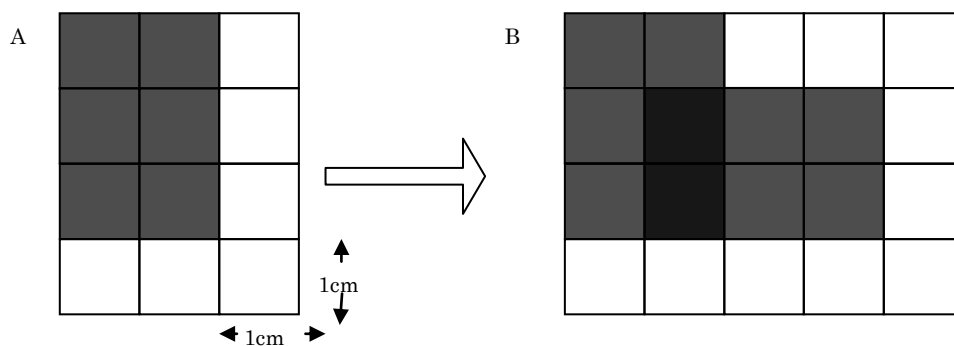
Marta: “Como el número de cuadraditos que contiene la figura es igual a la suma del número de cuadraditos que contiene el rectángulo más el número de cuadraditos que contiene el triángulo, entonces el área de la figura es la suma del área del triángulo y del rectángulo”.

¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué?

- 4) Determina el área de la figura usando la conclusión del inciso anterior y las fórmulas para el área de un triángulo y un rectángulo.

Actividad 2.3.2

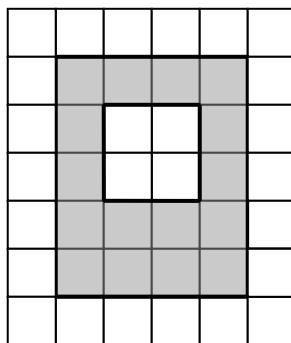
Para armar la figura B, se superpusieron dos rectángulos iguales al A.



- 1) ¿Cuál es el área de la figura A?
- 2) Rosa dice que el área de la figura B es 12 cm^2 . Sin embargo, Roberto piensa que el área es de 10 cm^2 . Explica cómo calculó el área cada uno y quién tiene razón.
- 3) ¿Cuál es el perímetro de la figura A?
- 4) Ahora Rosa dice que el perímetro de la figura B es 14 cm , pero Roberto piensa que el perímetro es de 20 cm . Explica cómo calculó el perímetro cada uno y quién tiene razón.

Actividad 2.3.3

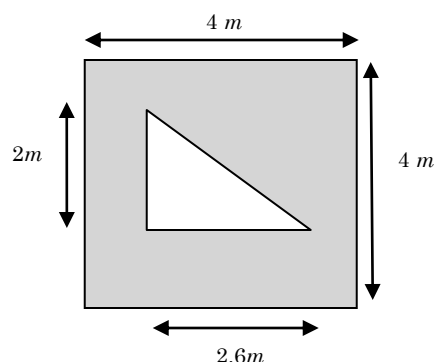
- 1) Determina el área de la siguiente figura usando la definición operacional (tomar como la longitud de cada lado 1 cm).



- 2) La figura está formada por un rectángulo al cual se le quitó un cuadrado ¿Podemos obtener el área de la figura gris restando al área del rectángulo el área del cuadrado? Explica tu respuesta usando la definición operacional.

Actividad 2.3.4

De un cuadrado de papel se recorta un triángulo como muestra la figura. Determina el área resultante.



Actividad 2.3.5

Considera tres figuras simples: un cuadrado de área 13m^2 , un triángulo de 8m^2 y un rectángulo de área 2m^2 . Usa estas figuras y construye:

- 1) Una figura compuesta cuya área sea 25 m^2 .
- 2) Una figura compuesta cuya área sea 5 m^2 .
- 3) Una figura compuesta cuya área sea 19 m^2 .

Actividad 2.3.6

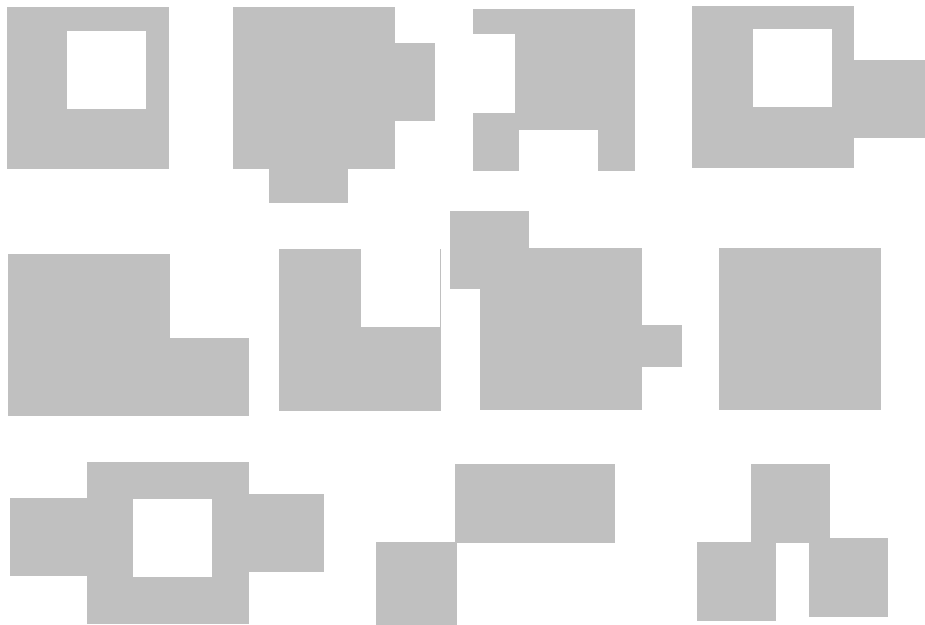
Imagina que quieres determinar el área de una figura compuesta que está formada por varias figuras simples.

- 1) Explica con tus palabras cuándo se suman las áreas de las figuras simples (en tu explicación incluye la palabra agregar)
- 2) Explica con tus palabras cuándo se restan las áreas de las figuras simples (en tu explicación incluye la palabra quitar)
- 3) Si una figura está formada por varias figuras más simples (rectángulos, cuadrados, triángulos, etc.), explica porqué el perímetro de la figura compuesta no es la suma de los perímetros de las figuras simples.

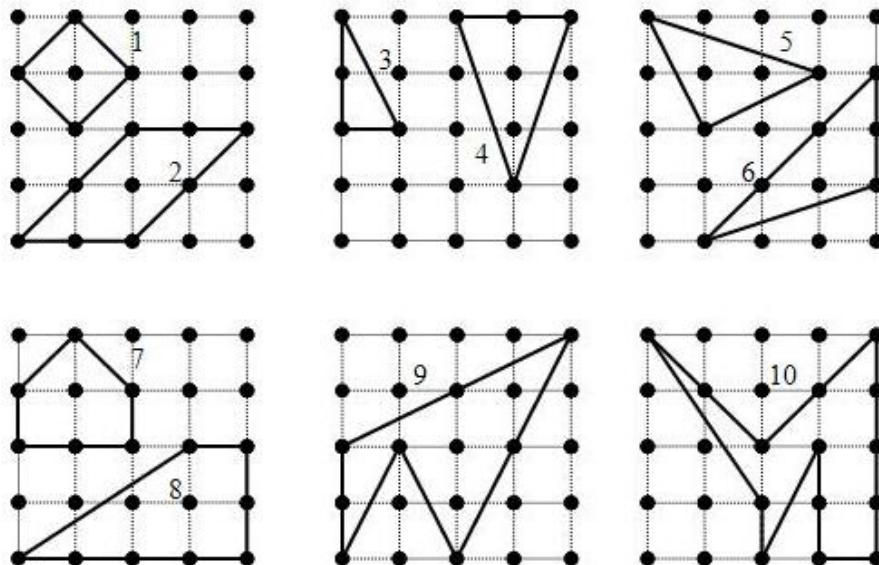
 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

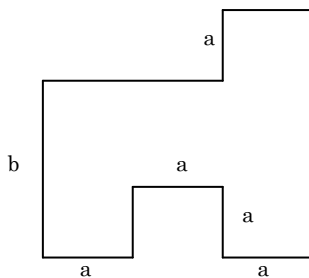
1. Determina cuáles de las siguientes figuras tienen la misma área. Explica tu razonamiento.



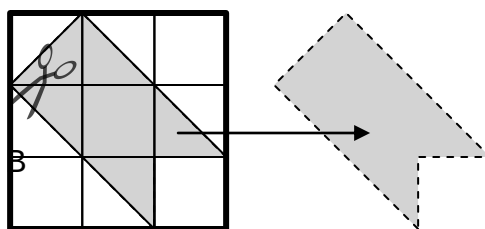
2. Determina el área de las siguientes figuras.



3. El diagrama corresponde al plano de una habitación. Las paredes son perpendiculares unas a otras. Si $a = 2$ m y $b = 7$ m, determina el área de la habitación.



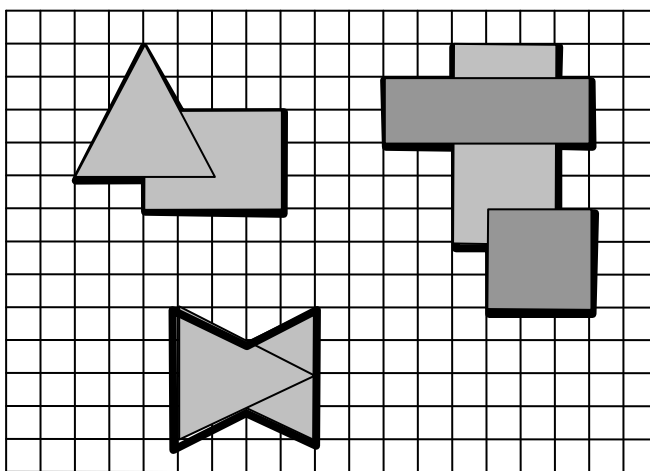
4. Hemos cuadrículado una hoja de 21 cm x 21 cm de cartón. Sobre la cuadrícula dibujamos la figura B y luego la recortamos:



- 1) ¿Cuál es el área de la figura B?
- 2) ¿Qué área tiene el pedazo de cartón sobrante?

5. En una cuadrícula cuyos cuadrados tienen 1 cm de lado, se han traslapado algunas figuras simples para formar figuras compuestas cuyos bordes están resaltados.

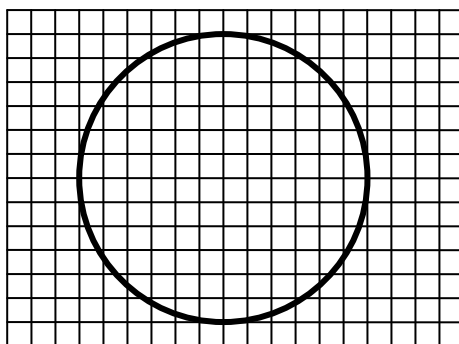
- 1) ¿Cuál es el perímetro de cada figura compuesta?
- 2) ¿Cuál es el área de cada figura compuesta?



2.4 Área del círculo

Actividad 2.4.1

¿Cuál es el área del círculo de la figura? Usa la definición operacional de área. Considera que la longitud del lado de cada cuadrado es 1.



Actividad 2.4.2

Utiliza un compás y papel milimétrico y dibuja diez círculos de diferentes radios. Aplica la definición operacional de área y completa la tabla.

Medida del radio “r” (cm)	Medida del área “A” (cm)	Resultado de la divi- sión $\frac{A}{r^2}$
1		
2		
3		
...		
9		
10		

Observa los resultados que obtuviste de $\frac{A}{r^2}$ para todos los círculos y compáralos con los que obtuvieron tus compañeros ¿Qué observas?

Predice cuál crees que será el valor aproximado de $\frac{A}{r^2}$ para algún otro círculo. Haz la prueba.

Al igual que como vimos cuando estudiamos perímetro, los griegos hicieron estas pruebas con cientos de círculos y encontraron que, para todo círculo que probaron, el resultado de dividir el área entre el cuadrado del radio también les daba aproximadamente el mismo número; este número es π .

La relación que encontramos nos dice que $\frac{A}{r^2} = \pi$. De este modo, si sabemos el radio de un círculo podemos encontrar su área a través de la “fórmula” $A = \pi r^2$. Por ahora, esta fórmula es tan solo una manera rápida de contar cuadritos.³

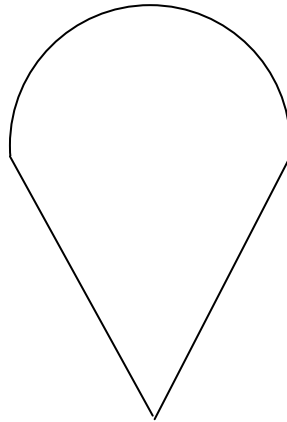
Considera los valores que obtuviste para π en la actividad 2.4.2. ¿Cómo se comparan con los que obtuviste en el capítulo anterior? ¿Cuáles fueron más precisos? Explica.

Actividad 2.4.3

¿Cuál es el radio del círculo de la actividad 2.4.1? Usa la fórmula para encontrar su área y compara tu resultado con el encontrado en esa actividad. Haz lo mismo para por lo menos 5 de los círculos que dibujaste en 2.4.2.

Actividad 2.4.4

Mide el área de la siguiente figura. Usa la definición operacional de área.

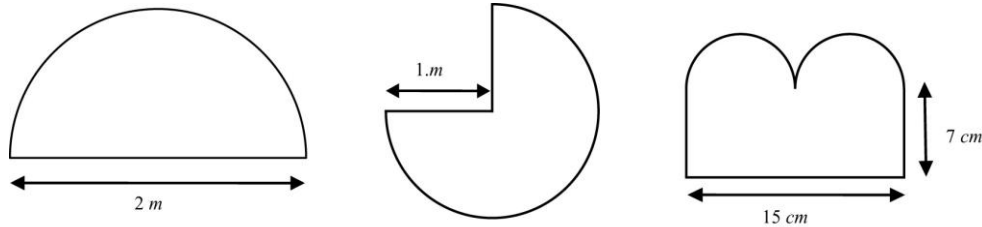


³ Para dar una justificación completa de la fórmula para obtener el área de un círculo es necesario saber un poco de “Cálculo”. Más adelante haremos una exploración sobre este tema.

Ahora calcula el área de una manera alternativa. Con una regla mide las longitudes que consideres necesarias y calcula el área usando la fórmula del área de un círculo.

Actividad 2.4.5

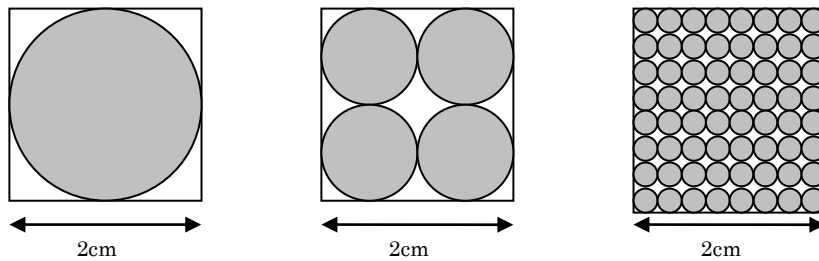
Determina el área de las siguientes figuras.



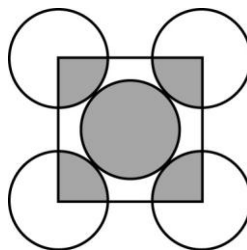
Discute tus respuestas con el profesor.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuál de las figuras sombreadas tiene mayor área? Explica tu respuesta.



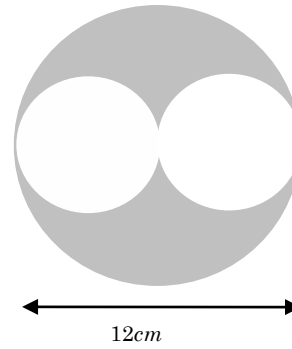
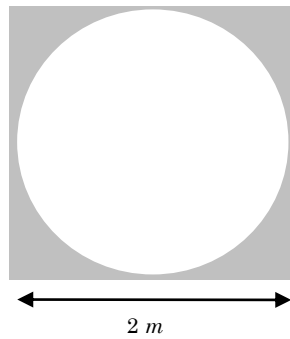
2. La siguiente figura está formada por cinco círculos de 4cm de radio, y un cuadrado cuyos vértices coinciden con los centros de cuatro de los círculos. Determina el área sombreada.



3. Si un disco tiene un área de (a) $24\pi \text{ cm}^2$, (b) $36\pi \text{ cm}^2$, ¿cuál es el perímetro del borde?

4. Si un círculo tiene un perímetro de (a) 15π cm, (b) 9π cm, (c) 20π cm, ¿Cuál es su área?

5. Determina el área sombreada en las siguientes figuras:

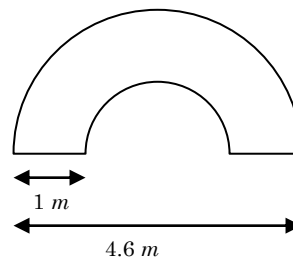
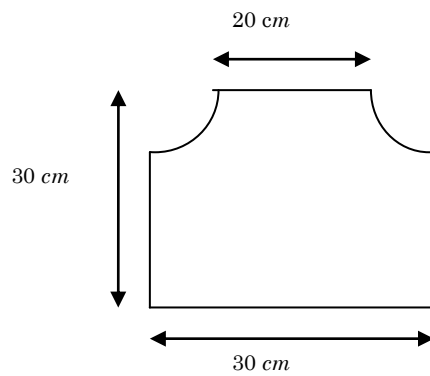
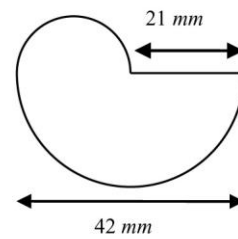
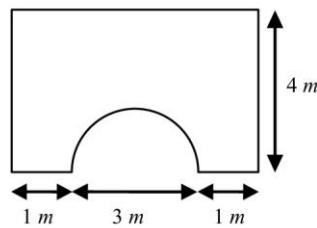
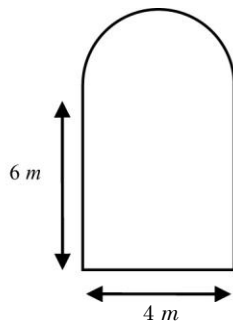


6. Dibuja, por lo menos dos figuras distintas, que tengan el área indicada en cada caso.

$$a) A = 9 \text{ cm}^2 + \pi(1 \text{ cm})^2$$

$$b) A = 12 \text{ cm}^2 - \frac{\pi(0.5 \text{ cm})^2}{2}$$

7. Determina el área de las siguientes figuras.



Exploración: El área del círculo.⁴

Tu prima Petra sabe que estás estudiando matemáticas y en particular que estás estudiando áreas. Aprovechando la oportunidad te pregunta: “Oye primo, yo también estoy estudiando el área del círculo en la escuela pero hay algo que no entiendo. ¿Cómo sabemos que el área del círculo está dada por $A = \pi r^2$? ¿se vale para todo círculo? Si me dicen que el área de un círculo es 25cm^2 ¿esto qué significa? ¿qué me dice acerca del círculo?”.

Escribe un diálogo con tu prima en donde contestes sus preguntas. ¿Estás satisfecho con tus respuestas? Explica.

Es posible que te haya resultado difícil contestar las preguntas de tu prima. En esta exploración intentaremos ayudarte un poco. La justificación no será 100% completa (para esto necesitamos saber “Cálculo”) pero esperamos que te ayude.

Hasta ahora, la única evidencia que tenemos de que la fórmula es cierta es que la hemos probado en algunos círculos. Pero ¿cómo sabemos que esta fórmula es cierta para todo círculo?

En esta exploración intentaremos justificar la fórmula para el área del círculo con un poco más de cuidado. Para esto haremos uso de dos ingredientes principales:

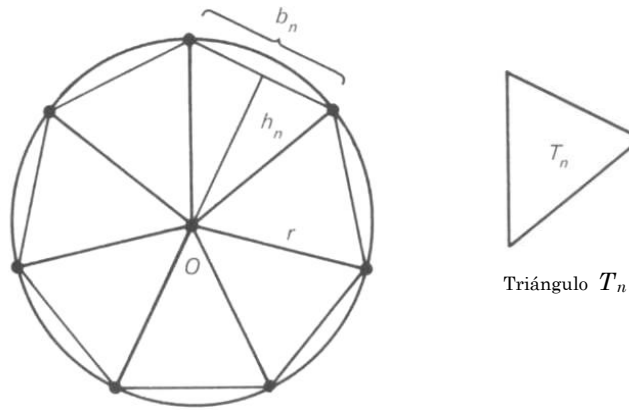
- 1) Tomaremos como verdadera la expresión que encontramos para el Perímetro de un círculo, es decir, $P = 2\pi r$.
- 2) Aproximaremos el área del círculo a través de polígonos regulares y observaremos que pasa conforme el número de lados de estos polígonos va aumentando.

1. Utilizando únicamente regla, compás y transportador. ¿Cómo harías para dibujar un polígono regular (aquel en que todos sus lados miden lo mismo) inscrito en un círculo de 5 cm de radio, en los casos donde el polígono tiene los siguientes lados: (a) 4 lados, (b) 5 lados, (c) 6 lados, (d) 8 lados, (e) 12 lados, y (f) 24 lados? Explica y realiza los dibujos.

2. Dibuja los radios del centro del círculo a los vértices de cada polígono. Utiliza la regla para medir las cantidades necesarias para encontrar los perímetros y áreas

⁴ En esta exploración te encontrarás con algunas formas de pensar que tal vez te sean poco familiares y por lo tanto difíciles. ¡Ten paciencia! Vale la pena. Haz lo mejor que puedas, eso es suficiente.

de cada uno de los polígonos que dibujaste. Ayuda: ¿vez algunos triángulos que te sean útiles? En la figura que sigue se muestra como se ve el dibujo para un polígono de siete lados).



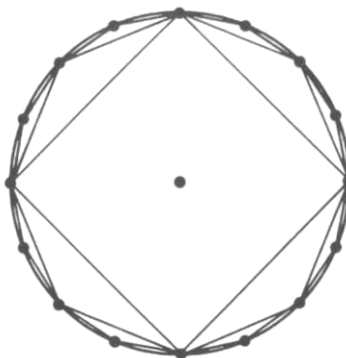
Polígono de 7 lados inscrito en un círculo de radio r

- 1) Describe los pasos que seguiste para calcular el área y perímetro de cada uno de tus polígonos.
- 2) Escribe una fórmula para obtener el perímetro de un polígono regular de “ n ” lados que miden b_n .
- 3) Escribe una fórmula para obtener el área de un polígono regular de “ n ” lados que miden b_n , y que tiene un apotema que mide h_n (como se ve en el dibujo anterior) (El apotema es el segmento que va desde el centro del polígono hasta el punto medio de cualquiera de los lados del mismo).
- 4) Utiliza los resultados anteriores para justificar la fórmula para el área, A_n , de un polígono regular de n lados. Esta es :

$$A_n = \frac{P_n \times h_n}{2}$$

Donde “ P_n ” es el perímetro y “ h_n ” es el apotema del polígono de n lados.

3. Observa los dibujos que realizaste de los polígonos. Conforme va aumentando el número de lados del polígono:



- 1) ¿Qué relación observas entre el perímetro del polígono y el perímetro del círculo externo? ¿Qué relación encuentras entre sus áreas? Explica.
 - 2) ¿Qué le ocurre al apotema conforme va aumentando el número de lados? ¿Qué relación encuentras con el radio del círculo? Explica.
 - 3) Ahora imagina que el número de lados crece arbitrariamente (tanto como quieras). ¿A qué “tienden” los valores del perímetro, área y apotema del polígono? Explica.
4. Utiliza los resultados anteriores para justificar por qué el área del círculo está dada por $A = \pi r^2$. (Ayuda: Haz uso de la fórmula para el área de un polígono regular y lo que encontraste en el punto anterior acerca de lo que ocurre conforme aumentas el número de lados del polígono. Recuerda que la fórmula para el perímetro del círculo es $P = 2\pi r$)
5. Vuelve a escribir un diálogo con tu prima en donde contestes sus preguntas. ¿Compáralo con el que escribiste al iniciar esta exploración? ¿Te sientes un poco más satisfecho?
6. Ahora tu prima se encuentra más satisfecha, pero después de pensar un rato te dice: *“Oye primo, creo que ya entiendo un poco mejor, pero al final de la explicación hicimos uso de que la fórmula para el perímetro del círculo es $P = 2\pi r$. ¿Cómo sabemos que esto es cierto?”*. ¿Qué le contestarías a tu prima? Explica.
-

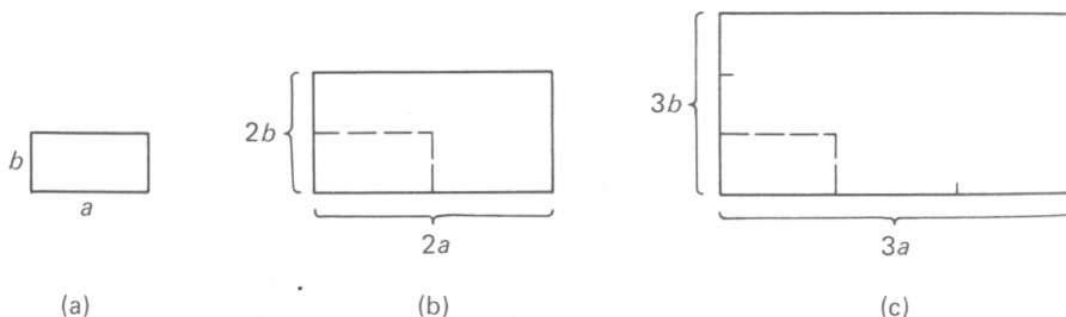
2.5 Perímetros y áreas: Escalamiento⁵

¿Qué le pasa al área de una figura cuando escalamos dicha figura? Para contestar esta pregunta, comenzaremos con un ejemplo sencillo: el rectángulo.

Asumimos que la unidad de longitud ha sido fijada. Entonces el área de un cuadrado cuyo lado mide a es a^2 y el área de un rectángulo cuyos lados miden a y b es ab (Recuerda que esto es una manera cómoda de escribir $a \times b$).

Actividad 2.5.1

Considera un rectángulo cuyos lados miden a y b como se muestra en la figura (a). Supón que multiplicamos las longitudes de los lados por 2 y obtenemos el rectángulo ilustrado en la figura (b). ¿Cuál es el área de esta nueva figura?



Ahora los lados del rectángulo escalado tienen las longitudes $2a$ y $2b$. Por lo tanto el área del rectángulo escalado es $2a2b = 4ab = 2^2ab$. De la misma manera, imagina que ahora escalamos los lados por 3 como se ilustra en la figura (c). Entonces los lados del rectángulo escalado tienen las longitudes $3a$ y $3b$. ¿Cuál es el área de esta nueva figura? ¿Qué pasaría con el área del rectángulo si escalas los lados por 5? Explica.

⁵ Esta sección se puede omitir en una primera lectura. Si te es difícil puedes regresar y volverla a hacer después de haber estudiado “Razones y proporciones”.

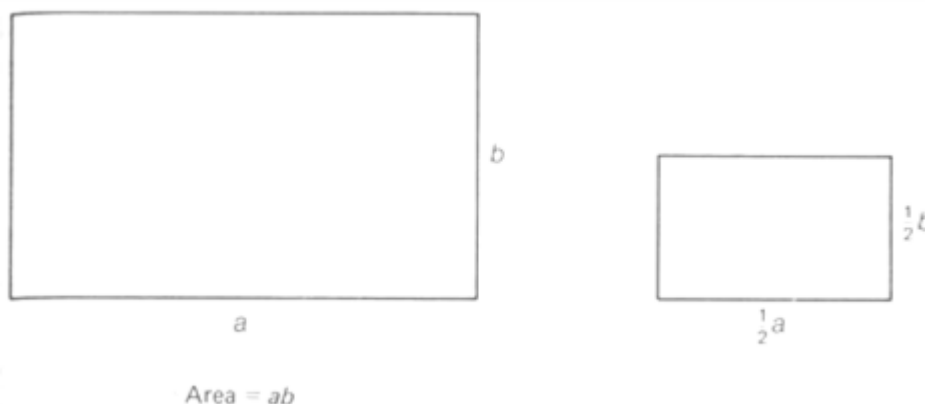
En general, supongamos que S es un rectángulo cuyos lados tienen una longitud de a y b respectivamente. Ahora llamaremos " rS " al escalamiento de S por r . esto significa que los lados de rS tienen longitudes de ra y rb respectivamente de modo que el área del rectángulo escalado es igual a:

$$(ra)(rb) = r^2ab.$$

Así, que el área del rectángulo cambia por r^2 cuando es escalada por r .

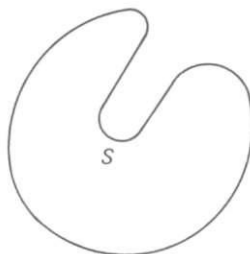
Actividad 2.5.2

Considera qué sucede cuando r es menor que 1, por ejemplo $r = \frac{1}{2}$. Si escalamos el rectángulo por $\frac{1}{2}$. ¿Cuál será el área del rectángulo escalado? Explica.

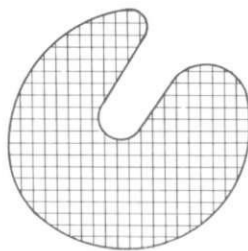


Actividad 2.5.3

Ahora nos gustaría explorar que sucede cuando escalamos figuras arbitrarias en un plano. Para esto podemos usar lo que observamos que sucede con los rectángulos. En la figura que sigue ilustramos una región arbitraria S .

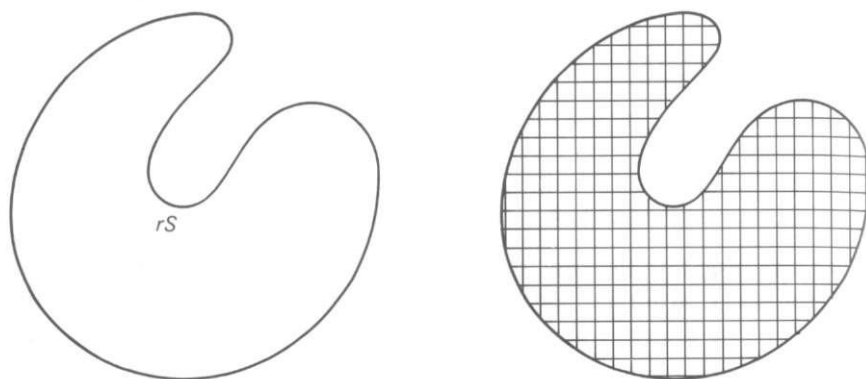


Como sabemos, podemos aproximar el área de esta figura a través de dibujar una fina cuadrícula, parecida a la que uno puede ver en un papel milimétrico:



Entonces contamos el número de cuadrados contenidos dentro de la figura para obtener el área aproximada de S . Como vimos en las secciones anteriores, podemos hacer una mejor aproximación a través de hacer la cuadrícula más fina, esto es, haciendo cuadrados más pequeños.

Cuando la figura S se escala por un número r , cada uno de los cuadrados también se escala por r .



Imagina que el factor de escala es 2, es decir $r=2$, esto significa que cada uno de los lados de los cuadraditos se multiplica por dos. ¿Cuál es el área de la figura escalada? Explica.

¿Qué sucederá con el área de la figura escalada si el factor de escala r es a)3, b)5, c)10, d) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{3}$? Explica.

Actividad 2.5.4

Considera la siguiente aseveración:

“Supongamos que S es una región arbitraria en un plano cuya área es A . Supongamos también que rS es la imagen de S habiendo sido escalada por un número positivo r . Entonces el área de rS es r^2A (esto es, $r^2 \times A$)”.

Utiliza lo que hemos hecho hasta ahora para justificar esta aseveración.

Actividad 2.5.5

Vuelve a revisar las figuras que trabajaste hasta ahora. ¿Qué pasa con los perímetros de éstas cuando hacemos escalamientos? Explica.

Después de hacer esto uno de tus compañeros, Carlos, te dice lo siguiente: “Después de haber revisado el perímetro de todas las figuras que hemos estado estudiando y de ver qué sucede cuando las escalamos, he llegado a la siguiente conclusión:

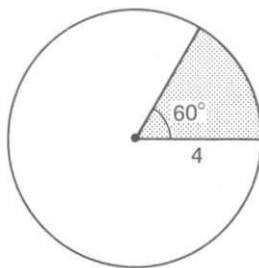
Si S es una región arbitraria en un plano cuyo perímetro es P , y rS es la imagen de S habiendo sido escalada por un número positivo r . Entonces el perímetro de rS es $r \times P$ ”.

¿Estás de acuerdo con la aseveración de Carlos? Si estás de acuerdo justifica tu respuesta. Si no estás de acuerdo escribe la aseveración que consideres correcta.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

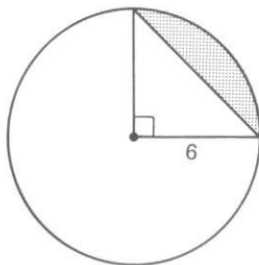
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se inscribe un círculo dentro de un cuadrado cuya área es 36. ¿Cuál es el área delimitada por el círculo?
2. Encuentra el área de la región sombreada dentro del disco y la longitud de la porción del círculo correspondiente a esta región:

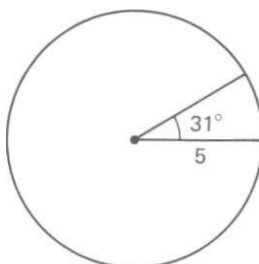


La región de este ejercicio es un caso especial de un sector. En general, un *sectores* la región de un disco contenida dentro de un ángulo. A la porción del círculo contenida dentro de un ángulo la llamamos *arco*.

3. Encuentra el área y arco de la región sombreada que se muestra a continuación:



4. Encuentra el área y arco del sector que tiene un ángulo de 31° en un disco con radio 5.



5. Supongamos que D es un disco con un área de 54 cm^2 y que S es un sector dentro de D que tiene un área de 12 cm^2 . Encuentra el ángulo de dicho sector. ¿Cuál es el arco?

6. Un rectángulo tiene lados cuyas longitudes son 30 mm y 60 mm. Si la longitud de los lados se triplica, ¿cuál es el área del rectángulo más grande?

7. El área de un cuadrado es de 10 cm^2 . Si la longitud de los lados del cuadrado se duplica, ¿cuál es el área del nuevo cuadrado?

8. Cuando la longitud de los lados de cualquier cuadrado se cuadruplica, el área se multiplica por ____ y el perímetro se multiplica por ____.

9. Si el radio de un disco se duplica, el área se multiplica por ____ y el perímetro por ____.

10. Supongamos que tienes una mesa cuadrada cuyos lados miden 1.5 m. Si quieres construir una segunda mesa cuya área sea el doble de la de la primera. ¿Qué tan largo debe ser cada lado?

11. Si quieres duplicar el área de un cuadrado, debes multiplicar sus lados por ____.

12. Si fueras un oficial de la procuraduría federal del consumidor, ¿qué le señalarías a la compañía que publicó el siguiente anuncio?

LOTES: 40 m x 100 m

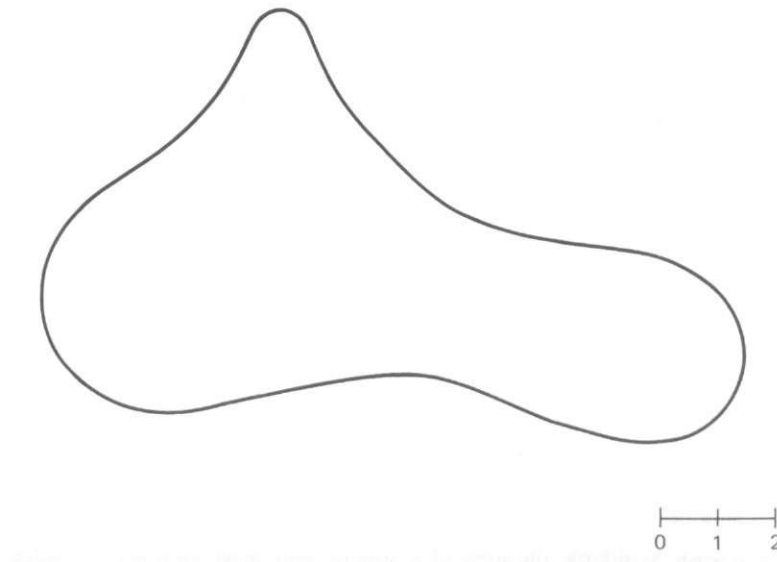
\$200,000

LOTES DE LA MITAD DEL TAMAÑO: 20 m x 50 m

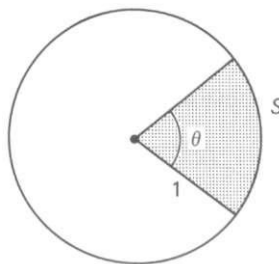
a menos de la mitad de precio

\$90,000

13. Traza el borde del lago que se ilustra abajo en un papel milimétrico. Estima su área utilizando la definición operacional de área. Usa un factor de escala de 1 cm por cada kilómetro.



11. Supón que S es el sector sombreado de un disco de radio 1 que se ilustra abajo:

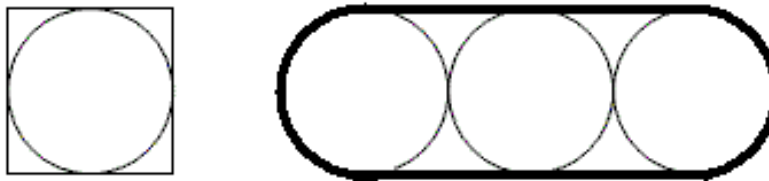


¿Cuál es el área del sector si el ángulo señalado θ tiene un valor de (a) 120° (b) 30° (c) x° ?

2.6 Perímetros y áreas: Aplicaciones

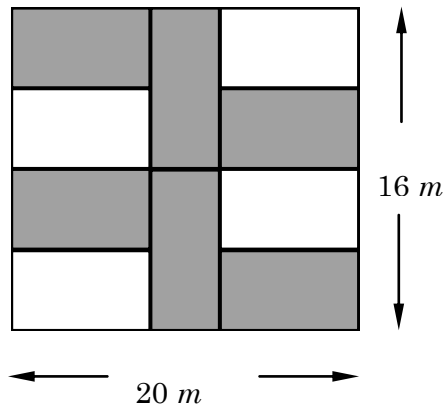
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Ruth dice: “Si una figura tiene mayor perímetro que otra, entonces también tiene mayor área”. ¿Estás de acuerdo con Ruth? Argumenta tu respuesta.
2. Escribe un diálogo en el cual le explicas a tu hermanita que si una figura tiene mayor perímetro que otra, no necesariamente tiene mayor área. (Puedes usar un ejemplo).
3. Dibuja, en los casos que requiera, dos figuras distintas que tengan lo que se indica en cada inciso. (Si te ayuda, usa papel cuadriculado).
 - 1) La misma área y distinto perímetro.
 - 2) El mismo perímetro y distinta área.
 - 3) La misma área y el mismo perímetro.
 - 4) Distinta área y distinto perímetro. La de mayor área debe tener mayor perímetro.
 - 5) Distinta área y distinto perímetro. La de mayor área debe tener menor perímetro.
4. El lado del cuadrado mide 4 m. ¿Cuál es el área y el perímetro de la región que encierra la línea gruesa en la figura de la derecha?



5. Se construye un jardín como el de siguiente la figura. Las regiones de color gris son de igual tamaño y las medidas del jardín están señaladas en la figura.

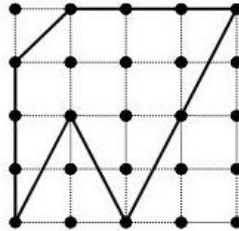
Determina el perímetro y área de los segmentos de la figura que están en gris (formada por los seis rectángulos sombreados).



6. Formula de Pick: La fórmula de Pick sirve para calcular el área de un polígono dibujado de modo que sus vértices coincidan con los de una cuadrícula. Para aplicarla contamos el número de puntos de la cuadrícula que se encuentran sobre la orilla de la figura, al cual llamamos n . También contamos el número de puntos que se encuentran en el interior de la figura, al cual denotamos por m . Entonces el área de la figura A está dada por la siguiente fórmula:

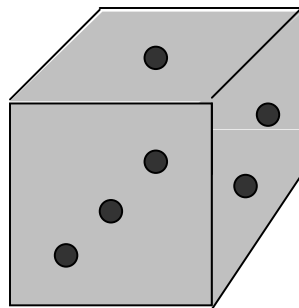
$$A = \frac{n}{2} + m - 1$$

En la figura que se muestra a continuación, $n = 11$ y $m = 5$. Por lo tanto, $A = 9.5$.



Utiliza la fórmula de Pick para encontrar el área de las figuras del ejercicio 2 de Ejercicios y Problemas de la sección 2.3 y verifica los resultados que habías encontrado.

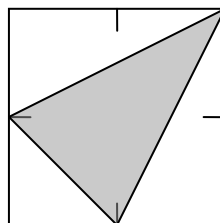
7. El dado tiene forma de cubo con 1.2 cm de lado. Cada puntito es un círculo de 2 mm de diámetro.



¿Cuántos cm^2 cubre la parte gris del cubo?

8. ¿Cuál es el área de la etiqueta de una lata de ensalada que tiene 12 cm de diámetro y 15 cm de altura? Primero haz un dibujo para visualizar la situación.

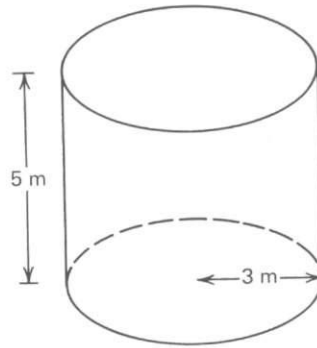
9. El cuadrado representa una pieza de plata que tiene un precio de \$ 700 ¿cuál es el precio de la parte sombreada de la pieza?



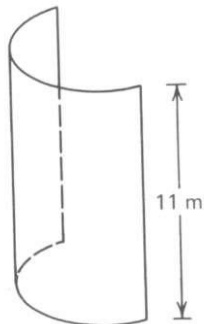
10. Si un disco tiene un área de (a) $24\pi \text{ cm}^2$, (b) $36\pi \text{ cm}^2$, ¿cuál es el perímetro del borde?

11. Si un círculo tiene un perímetro de (a) 1571 cm, (b) 97tcm, (c) $20n \text{ cm}$, ¿Cuál es su área?

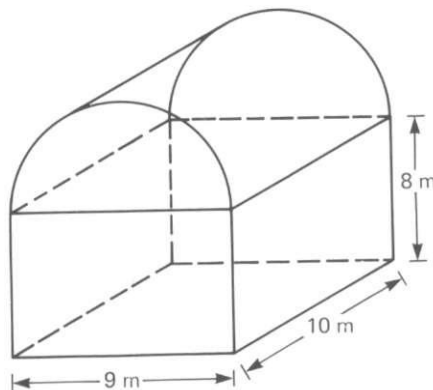
12. Una hoja rectangular de metal es doblada para formar un cilindro como se muestra en el dibujo. El radio de la base es de 3m y la altura del cilindro es de 5m. ¿Cuál es la superficie total del cilindro (1) con tapas y (2) sin tapas?



13. Una hoja rectangular de metal es doblada para formar un medio cilindro como se muestra en el dibujo. Si el radio de la base del cilindro es de 4m y la altura es de 11m. ¿Cuál es la superficie total de la hoja?



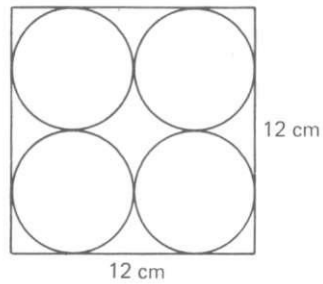
14. Considera que el techo de una cabaña tiene la forma de medio cilindro como se muestra en el dibujo.



1) ¿Cuál es la superficie del techo?

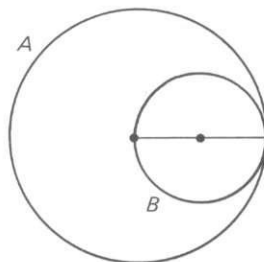
2) ¿Cuál es la superficie total del techo y paredes de la cabaña?

15. Cuatro latas del mismo tamaño son empacadas en una caja de base cuadrada como se muestra a continuación. ¿Cuál es el área del espacio desaprovechado?



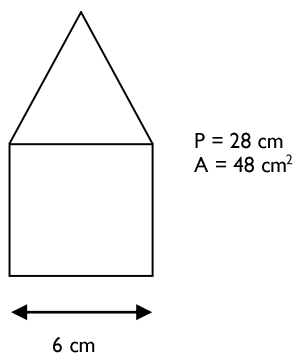
PROBLEMAS DE RETO

0. Los círculos A y B son internamente tangentes el uno al otro y el círculo B pasa por el centro de A. Si el área del círculo A es 16 ¿Cuál es el área del círculo B?

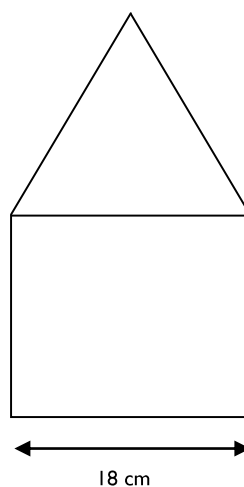
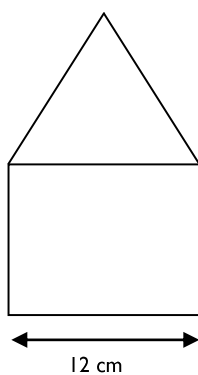


1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide el doble que el otro cateto. El área del triángulo es de 72 cm^2 . ¿Cuánto mide la hipotenusa?

2. Considera la siguiente figura construida con un cuadrado y un triángulo isósceles:



Imagina que ahora haces dos ampliaciones de este dibujo en las fotocopias de manera que cuando mides se ven así (nota: lo importante de los dibujos son las nuevas medidas):

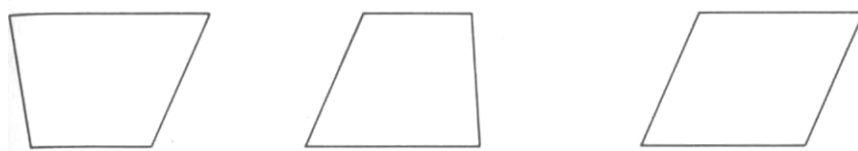


- 1) ¿Cuál es el perímetro y área de las figuras ampliadas? ¿Podrías contestar sin hacer casi ningún cálculo? En cada caso explica ¿Cuál es la escala?

Ayuda: si te atorras dibuja un cuadrado estándar de 1 cm en la figura original. ¿Cuántos puedes ajustar? Después dibuja ese cuadrado (escalado) en las ampliaciones. ¿Cuánto mide cada lado? ¿Cuál es su área? ¿Cuántos de estos caben en las figuras nuevas? Explica claramente tu razonamiento.

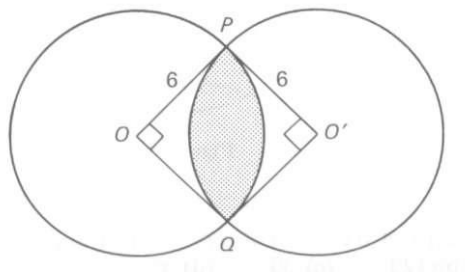
- 2) Tu primo te dice que hizo una ampliación y una reducción de la figura original.
- Si el perímetro de la figura reducida es de 14 cm ¿cuál es el área? ¿cuál es la escala? Explica.
 - Si el área de la figura ampliada es de 1200 cm² ¿cuál es el perímetro y la escala? Explica.

3. Un trapezoide es una figura de cuatro lados que tiene dos de sus lados paralelos, a los que llamamos bases. Los dibujos que siguen muestran 3 ejemplos de trapezoides.



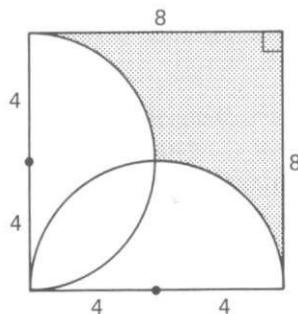
Muestra que el área de cualquier trapezoide con bases que miden b_1 y b_2 y altura h está dada por $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$. Ayuda: Dos triángulos resuelven el problema.

4. Dos círculos con un radio de 6 se intersectan en dos puntos P y Q como se muestra abajo:



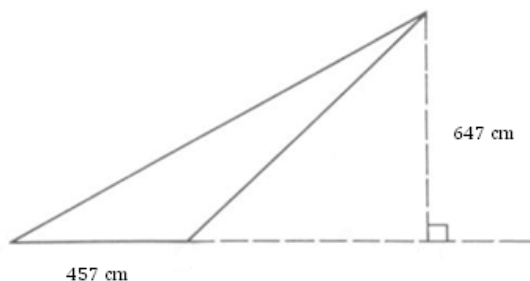
Los ángulos que se muestran son de 90° como se indica. Calcula el área de la región sombreada. Ayuda: Dibuja el segmento PQ.

5. Encuentra el área de la región sombreada: Las líneas curvas son semicírculos:



6. Justificación de la fórmula para el área del triángulo.

Considera el siguiente triángulo: ¿Cuál es su área? Explica.



Ahora llega tu prima Petra y te pregunta: “Oye prima, acabo de ver que calculaste el área del triángulo y te salió $295,679 \text{ cm}^2$. Creo que para obtener el área aplicaste la fórmula.

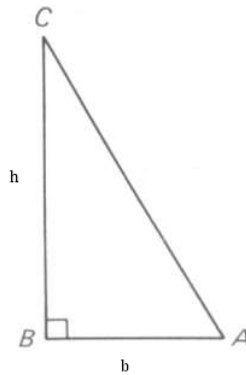
Hasta ahora yo sabía que el área de una figura es el número de cuadrados estándar que se ajustan dentro de la misma (en este caso los cuadrados son de 1 cm de lado). Para rectángulos creo que ya entendí de donde sale la fórmula pero ¿Cómo sabemos que dentro del triángulo anterior caben $295,679 \text{ cm}^2$? ¿Es obvio? ¿Cómo podemos estar seguros? ¿Cómo sabemos que para obtener el número de cuadrados estándar que se ajustan a cualquier triángulo hay que multiplicar la base por la altura y luego dividirlo entre dos? Por favor explícame”.

Escribe un diálogo con tu prima en donde contestes sus preguntas. ¿Estás satisfecho con tus respuestas? Explica.

Al igual que con la “exploración del área del círculo”, es posible que te haya resultado difícil contestar las preguntas de tu prima. En este problema intentaremos justificar la fórmula para el área de un triángulo, a saber, $A = \frac{b \times h}{2}$.

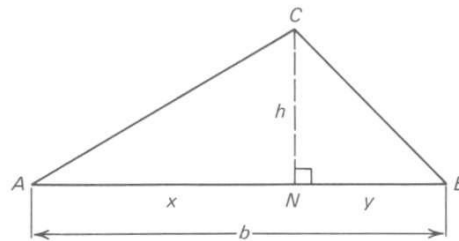
La justificación consta de dos partes: 1) Justificar que el área de todo triángulo rectángulo está dada por $A = \frac{b \times h}{2}$, 2) utilizar este resultado para mostrar que el área de cualquier otro triángulo también está dada por la misma expresión.

6.1. Considera el siguiente triángulo rectángulo ABC:



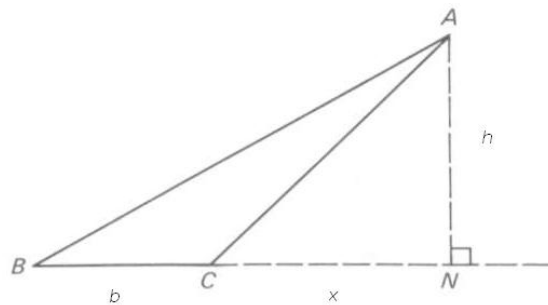
Haz uso del rectángulo apropiado para argumentar por qué el área de este triángulo rectángulo está dada por $A = \frac{b \times h}{2}$. Explica claramente tu razonamiento.

6.2. Ahora considera el siguiente triángulo ABC:



Utiliza el resultado anterior (acerca del área de triángulos rectángulos) para mostrar que para este triángulo el área también está dada por $A = \frac{b \times h}{2}$.

6.3. Por último considera el siguiente triángulo ABC:



Vuelve a mostrar que el área de ABC está dada por $A = \frac{b \times h}{2}$. Ayuda: Observa que el área de ABC es igual al área de ABN menos el área de ACN.

6.4 ¿Podrías dibujar un triángulo que no sea como alguno de los casos anteriores? Si tu respuesta es “sí”, dibújalo. Si tu respuesta es “no” ¡hemos terminado con la justificación!

Vuelve a escribir un diálogo con tu prima en donde le contestes sus preguntas.

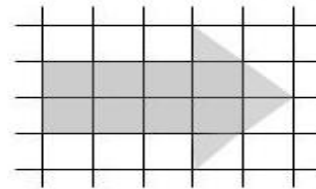
2.7 Autoevaluación

- 1 Explica los pasos a seguir para determinar el área de una figura cualquiera (definición operacional).
- 2 ¿Qué significa que el área de una figura es 57 cm^2 ?
- 3 ¿Qué es más sencillo para determinar el área de una figura: usar la definición o usar fórmulas? Explica.
- 4 Dibuja un cuadrado, un rectángulo, un círculo, un triángulo acutángulo, un triángulo rectángulo y un triángulo obtusángulo e indica cuál es su área.
- 5 Da dos ejemplos de figuras compuestas cuya área se calcule:
 - 1) Sumando las áreas de algunas figuras simples
 - 2) Restando al menos una vez el área de una figura simple

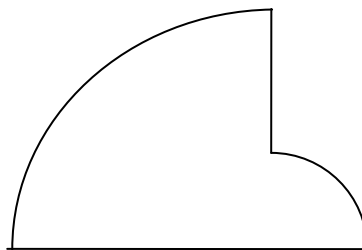
Utiliza en cada caso la definición operacional para explicar por qué sumas o por qué restas.

- 6 Dibuja 3 figuras distintas cuyas áreas sean de 48 cm^2 .
- 7 Determina el área y perímetro de la figura si cada lado del cuadrado mide: (En cada caso, explica)

a) 4 m	P=_____	A=_____
b) 2.5 cm	P=_____	A=_____
c) 0.5 m	P=_____	A=_____

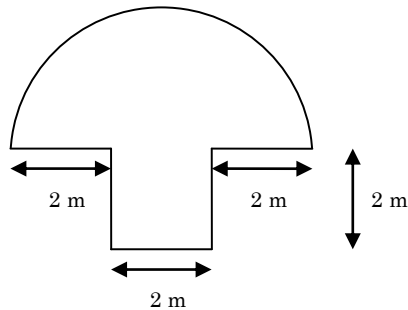


- 8 Mide el área y perímetro de la siguiente figura.
 - a) usando la definición operacional:

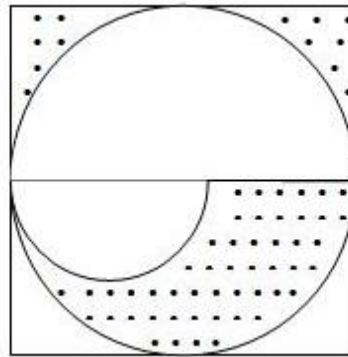


b) Con una regla mide las longitudes que consideres necesarias y calcula el área usando la fórmula del área del un círculo.

9 Determina el área y perímetro de la siguiente figura:



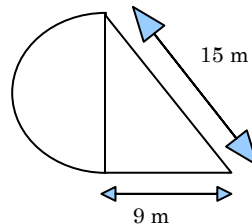
10 El cuadrado mide 240 mm de lado y el radio del semicírculo menor es la mitad del radio del semicírculo grande ¿Cuál es el área de la región marcada con puntos? Explica tu razonamiento.



11 Si un círculo tiene un perímetro de 40 cm, ¿Cuál es su área?

12 Si el radio de un disco se triplica, el área se multiplica por___ y el perímetro por___.

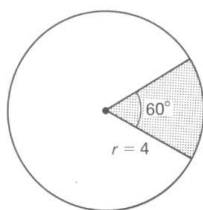
13 Considera la siguiente figura:



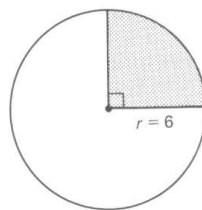
a) Encuentra el perímetro y el área.

b) Encuentra el nuevo perímetro y área si la figura se escala 1) al doble y 2) a un tercio. Haz dibujos. En cada caso explica tu respuesta.

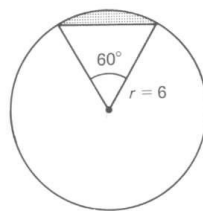
14 Encuentra las áreas de las regiones sombreadas:



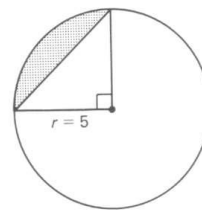
(a)



(b)



(c)



(d)

15 Completa la siguiente tabla:

Figura	Fórmula para el Perímetro	Fórmula para encontrar el Área	Dibujo y Observaciones (cómo encuentras la fórmula)
Cuadrado	$4 \times L$	L^2	 L
Rectángulo			
Triángulo			(Además del dibujo, explica cómo se determinan la base y altura)
Trapezio			
Polígono regular			
Círculo			

Objetivos de aprendizaje del capítulo 2

Después de haber terminado este capítulo debes de ser capaz de hacer las siguientes cosas:

- 1 Di cuáles son los pasos que hay que seguir para “medir” el área de una figura cualquiera (esto es, dar una “definición operacional” de área). Explica qué es un cm^2 , un m^2 , etc.
- 2 Poder medir el área de una figura cualquiera. También, medir el área de una figura cuando esta cuadrículada en cuadrados de tamaño no estándar.
- 3 Explica, con tus propias palabras, la relación que hay entre las “fórmulas” para calcular el área de los polígonos regulares (triángulos, rectángulos, etc.) y la definición operacional de área. Asegúrate que puedes *justificar* las fórmulas.
- 4 Explica, con tus propias palabras, la relación que hay entre la “fórmula” para calcular el área de un círculo y la definición operacional de área. Además, explica la relación que hay entre la fórmula para calcular el área de un polígono regular y la fórmula para calcular el área de un círculo. Explica la justificación que dimos de la fórmula para el área del círculo y las limitaciones de esta justificación..
- 5 Resuelve y formula problemas tales como: 1) obtener el área de figuras compuestas; 2) reconocer la figura compuesta dada la expresión para calcular el área; 3) encontrar el área de figuras sombreadas; 4) aplicaciones, etc.
- 6 Explica por qué dada una figura compuesta por figuras simples, el área de la figura es la suma de las áreas de las figuras simples; mientras que el perímetro no es la suma de los perímetros de las figuras simples.
- 7 Explica las diferencias y similitudes entre área y perímetro. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques cómo se fueron resolviendo con las actividades. Revisa el ejercicio 3 de la sección 2.6.
- 8 Explica que le sucede al área y perímetro de una figura si la escalamos.
- 9 Formula y resuelve problemas como los del final del capítulo (Autoevaluación).

CAPÍTULO 3

*Recta numérica y definiciones
operacionales*

Las reglas del juego

*Richard Feynman*¹

Una forma, una analogía divertida para hacerse una idea de lo que estamos haciendo cuando tratamos de entender la naturaleza, consiste en imaginar que los dioses están jugando una gran partida de ajedrez, pongamos por caso, y nosotros no conocemos las reglas del juego. Pero se nos permite mirar el tablero, al menos de vez en cuando, quizá en una pequeña esquina, y a partir de estas observaciones tratamos de imaginar cuáles son las reglas del juego, cuáles son las reglas para mover las piezas. Al cabo de un tiempo podríamos descubrir, por ejemplo, que cuando hay sólo un alfil en el tablero, este alfil siempre se mueve por casillas del mismo color. Más adelante podríamos descubrir que la ley para el movimiento del alfil consiste en que éste se mueve en diagonal, lo que explicaría la ley que descubrimos antes —que el alfil estaba siempre en una casilla del mismo color— y eso sería análogo a descubrir una ley y más adelante obtener una comprensión más profunda de la misma. Luego pueden suceder cosas, todo va bien, hemos obtenido todas las leyes, todo parece muy bien; y entonces, de repente, ocurre un fenómeno extraño en algún rincón, así que empezamos a investigarlo: es un enroque, algo que no esperábamos. Dicho sea de paso y en física fundamental siempre estamos tratando de investigar aquellas cosas de las que no entendemos las conclusiones. Una vez que las hemos puesto a prueba suficientemente, estamos conformes.

Lo que resulta más interesante es aquello que no encaja, la parte que no procede según lo que uno esperaba. Además, podríamos tener revoluciones en física: una vez que hemos advertido que los alfiles se mueven por casillas del mismo color y se mueven en diagonal y así sucesivamente durante mucho tiempo, y todo el mundo sabe que esto es verdad, entonces uno descubre repentinamente un día en cierta partida de ajedrez que el alfil no sigue en una casilla del mismo color, que ha cambiado de color. Sólo más tarde descubrimos una nueva posibilidad, que un alfil haya sido capturado y que un peón haya coronado para dar lugar a un nuevo alfil (lo que puede suceder pero no lo sabíamos). Así que esto se parece mucho a cómo son nuestras leyes: a veces parecen definitivas, siguen funcionando y luego, de repente, algún truco muestra que eran erróneas y entonces tenemos que investigar las condiciones en las que sucedió el cambio de color de este alfil, y así sucesivamente. Y poco a poco aprendemos la nueva regla que lo expli-

¹ Feynman, Richard. *El placer de descubrir*. Editorial Crítica. Barcelona. 2004. Págs. 23-25.

ca con mayor profundidad. Sin embargo, a diferencia del juego de ajedrez, en el que las reglas se hacen más complicadas a medida que uno avanza, en física todo parece más simple cuando uno descubre cosas nuevas. Parece más complicado en conjunto porque abarcamos más —esto es, aprendemos acerca de más partículas y más cosas nuevas— y por eso las leyes parecen complicarse de nuevo. Pero si uno se fija bien, es algo maravilloso pues, aunque extendamos nuestra experiencia a regiones cada vez más inexploradas, de cuando en cuando obtenemos estas síntesis en las que todo encaja de nuevo en algo unificado, en donde todo resulta ser más simple de lo que parecía antes.

Si ustedes están interesados en el carácter último del mundo físico, o del mundo entero, nuestra única forma de comprenderlo por el momento es mediante un razonamiento de tipo matemático. Por eso yo no creo que una persona pueda apreciar por completo, ni siquiera que pueda apreciar mucho de estos aspectos concretos del mundo y del carácter profundamente universal de las leyes y de las relaciones entre las cosas, sin tener una comprensión de las matemáticas. Yo no conozco otra forma de hacerlo, no conocemos ninguna otra forma de describirlo con exactitud... o de ver las interrelaciones si no es con ellas. Así que no creo que una persona que no haya desarrollado cierto sentido matemático sea capaz de apreciar por completo este aspecto del mundo. No me malinterpreten: existen muchísimos aspectos del mundo para los que las matemáticas no son necesarias; aspectos tales como el amor, que son deliciosos y maravillosos de apreciar y hacia los que se puede sentir temor y misterio. No pretendo decir que lo único que hay en el mundo sea la física, pero ustedes estaban hablando de física y si es de eso de lo que están hablando, entonces el no saber matemáticas es una grave limitación para entender el mundo.

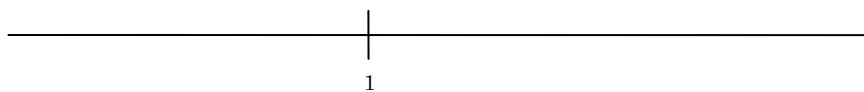
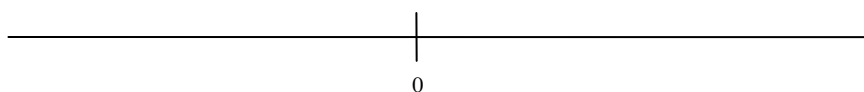
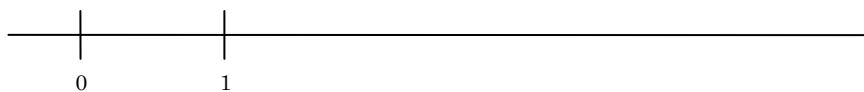
Actividad 3.0.1

- 1) Explica con tus propias palabras la *analogía* que utiliza Feynman para darnos una idea de cómo intentamos entender a la naturaleza en la Física.
- 2) De acuerdo con el autor ¿Por qué es necesario saber matemáticas?

3.1 La recta numérica

Actividad 3.1.1

3) En cada una de las rectas numéricas, ubica el número 2.



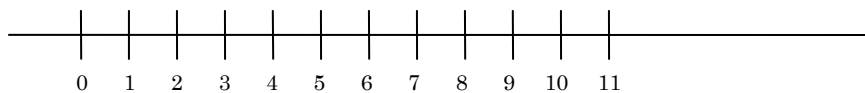
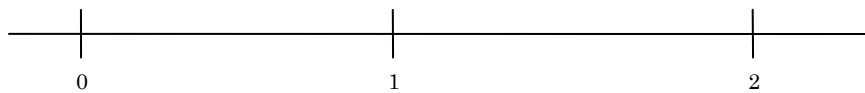
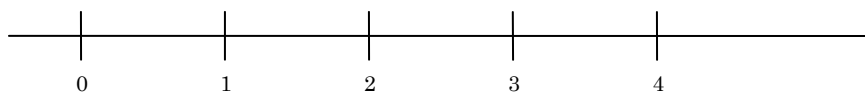
4) Si dibujamos la siguiente recta:



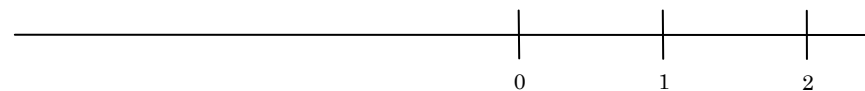
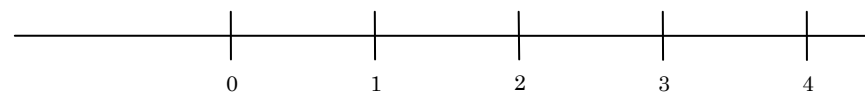
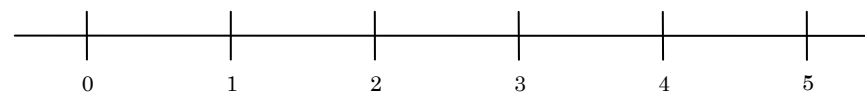
Explica con tus palabras cómo podemos construir una recta numérica en ella. Esto es, como podemos ubicar diferentes números en la misma.

Actividad 3.1.2

Jorge dibujó tres rectas numéricas como se muestra a continuación:



- 1) ¿Podrías decir que una de las rectas es la correcta y las otras son incorrectas?
- 2) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las rectas que dibujó Jorge?
- 3) Ahora Jorge dibujo estas otras 3 rectas ¿Podrías decir que una de las rectas es la correcta y las otras son incorrectas? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las rectas?

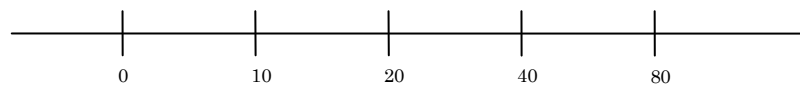
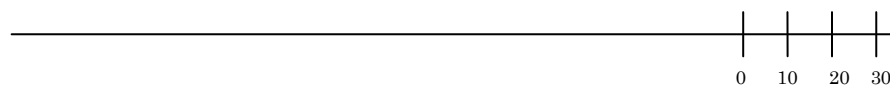
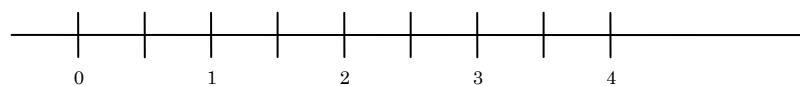
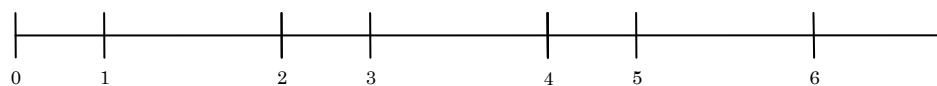
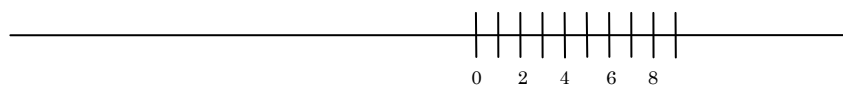
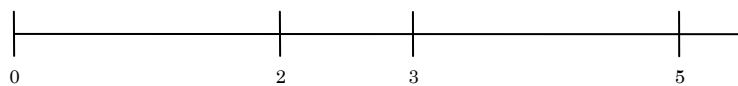
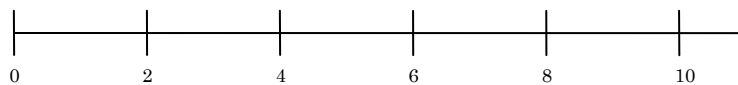


Actividad 3.1.3

- 1) ¿Podrías dibujar una recta numérica en la cual la distancia entre 0 y el 1 sea de 1 cm?
- 2) ¿Es única la solución de este problema? Explica tu respuesta.

Actividad 3.1.4

Algunas de las siguientes rectas numéricas están mal hechas. En cada caso explica por qué.



Actividad 3.1.5

Para construir una recta numérica primero se dibuja una recta. Luego es importante contar con *dos elementos* (o datos) para empezar a construir la recta numérica ¿podrías indicar cuáles son estos *elementos*?

Ayuda: Para responder esta pregunta es importante que revises las respuestas que diste en las Actividades 3.1.1-3.1.4.

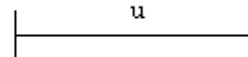
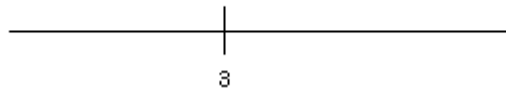
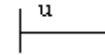
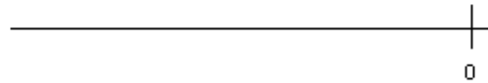
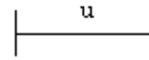
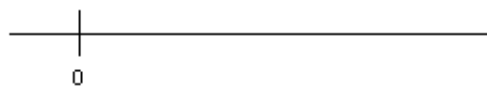
👉 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Definición 1 de recta numérica: *Para construir una recta numérica se pueden seguir los siguientes pasos:*

- 1) *Dibujar una recta*
- 2) *Elegir un punto cualquiera de la misma y asignarle el número 0*
- 3) *Tomar una unidad de medida, por ejemplo 1 cm. Repetimos esta unidad a lo largo de la recta, asignando a los puntos sucesivos así definidos los números 1, 2, 3, etc.*

Actividad 3.1.6

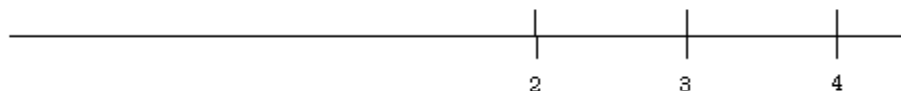
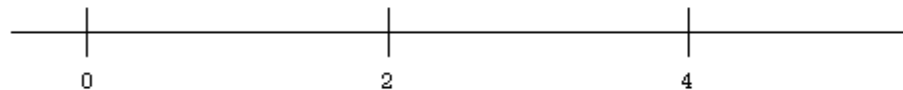
- 1) Construye una recta numérica usando los datos indicados en cada caso. La unidad de medida se indica mediante el segmento u.

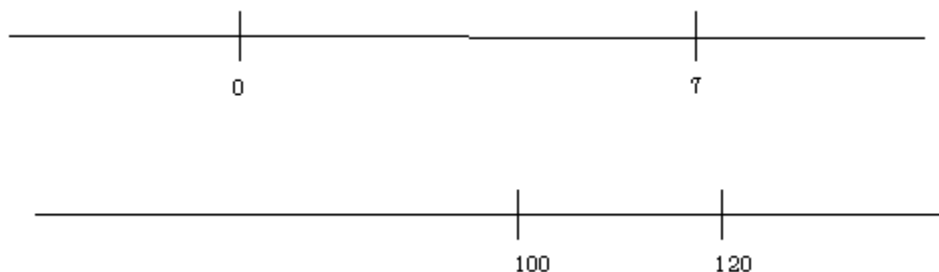


- 2) En cada una de las rectas numéricas del inciso anterior ubica el número 5.

Actividad 3.1.7

Indica cual es la unidad de medida en cada una de las siguientes rectas. En aquellas rectas donde no figure el 0, dibújalo donde corresponde.





Actividad 3.1.8

Responde las siguientes preguntas. Si lo consideras conveniente, puedes usar un ejemplo que aclare la situación.

- 1) ¿Es necesario que al punto arbitrario tomado para empezar a construir la recta numérica le asignemos el número 0? ¿o le podemos asignar cualquier número?
- 2) ¿Es necesario que se dé la distancia entre 0 y 1 para construir la recta numérica o basta saber la distancia entre cualquier par de números?

Actividad 3.1.9

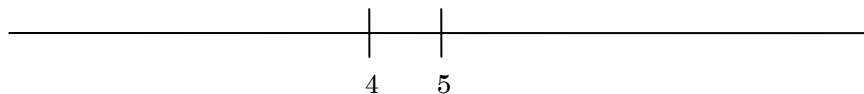
Considera la definición 1 de recta numérica. ¿Consideras que está completa o le podrías agregar algo para que sea más general (qué abarque más casos)? Ayuda: Para responder esta pregunta revisa la definición 1 de recta numérica y las respuestas que diste en las Actividades 3.1.6-3.1.8.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Es importante que recuerdes que para construir una recta numérica es necesario contar con dos elementos o datos. En los ejemplos anteriores estos elementos son: un punto arbitrario y la distancia entre dos números. En algunos casos, el número arbitrario era el 0. En otros casos la distancia entre dos números era la unidad de medida (recuerda que la unidad de medida es la distancia entre dos números consecutivos, como 0 y 1 o 7 y 8).

Actividad 3.1.10

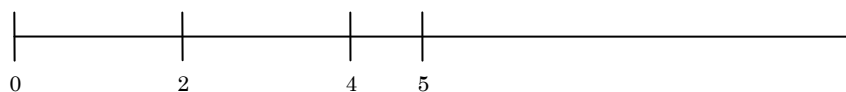
¿Podrías ubicar el número 2 en la siguiente recta numérica?

**Actividad 3.1.11**

Observa como resolvieron la Actividad anterior dos estudiantes:

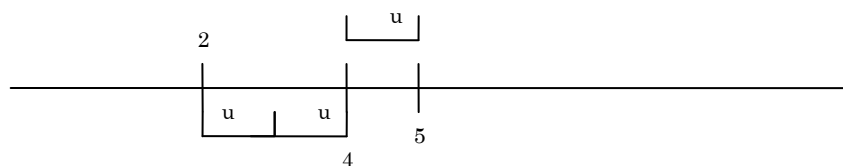
Solución de Sandra:

- 1) Primero ubico el 0 al inicio de la recta
- 2) La mitad, entre 0 y 4 es el 2



Solución de Rodrigo:

- 1) Identifico la unidad de medida, que es la distancia entre 4 y 5.
- 2) Repito la unidad de medida dos veces hacia la izquierda. De esta manera encuentro la posición del número 2.



¿Con quién estás de acuerdo? Explica con quién estás de acuerdo y por qué. También explica con quien no estás de acuerdo y por qué.

Actividad 3.1.12

- 1) La siguiente recta numérica está mal hecha. Explica por qué.

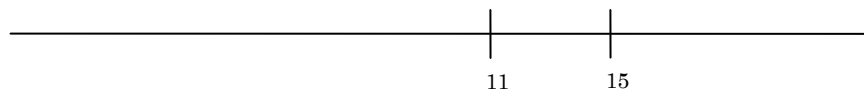


- 2) ¿Qué similitud encuentras entre la solución de Sandra y la recta del inciso 1) de esta Actividad?

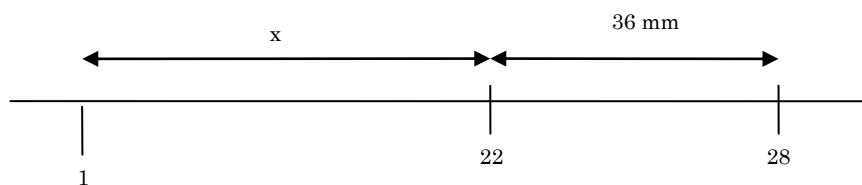
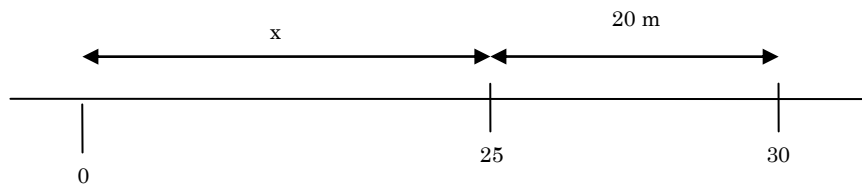
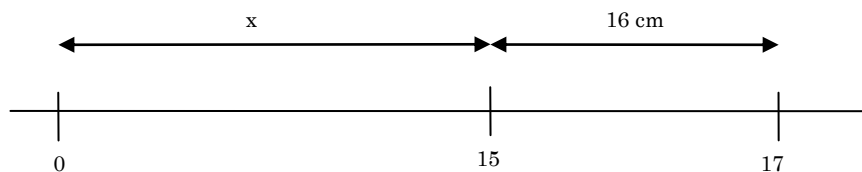
Anteriormente mencionamos que para construir una recta numérica es necesario conocer dos elementos. Vimos que estos elementos podrían ser un punto arbitrario y la distancia entre dos puntos. Ahora podemos agregar que estos dos elementos pueden ser la posición de dos puntos (números) de la recta.

Actividad 3.1.13

- ¿Podrías ubicar el número 2 en la siguiente recta numérica?

**Actividad 3.1.14**

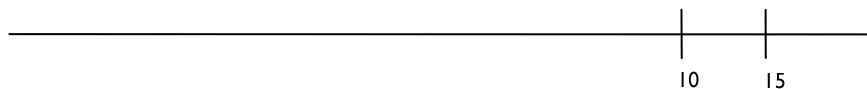
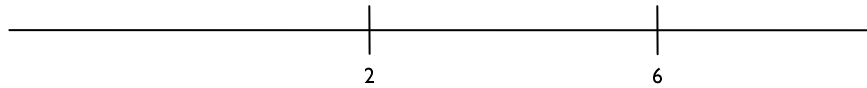
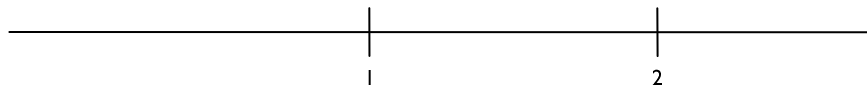
- En cada inciso determina la longitud de la unidad y el valor de x .



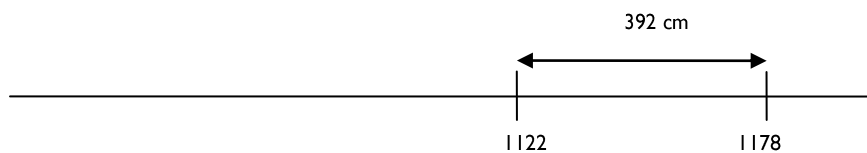
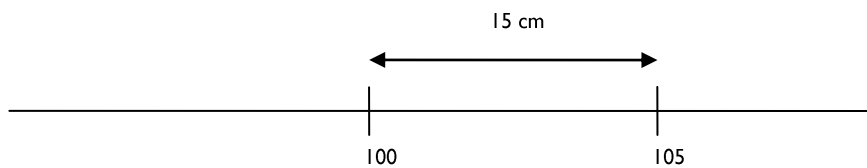
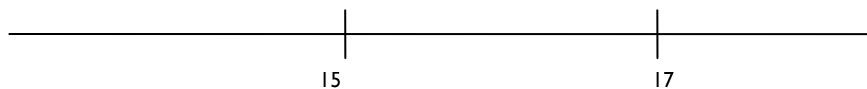
 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

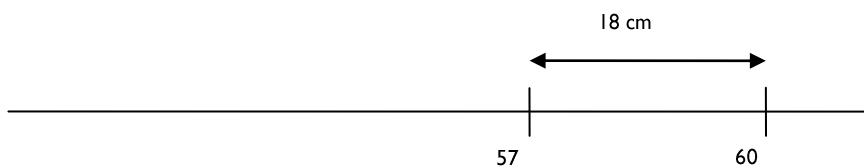
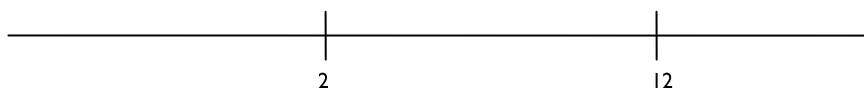
1. En cada recta numérica, ubica el origen de acuerdo con los datos dados en cada caso.



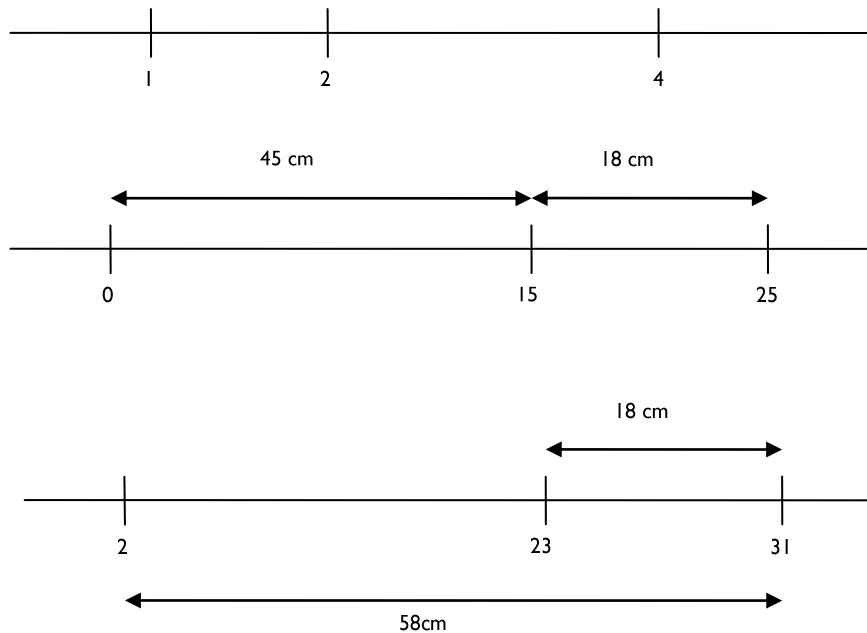
2. En cada recta, indica cuánto vale la unidad de medida.



3. Ubica en cada caso el número 3.



4. Indica cuales de las siguientes rectas están mal hechas. Explica tu respuesta en cada caso.

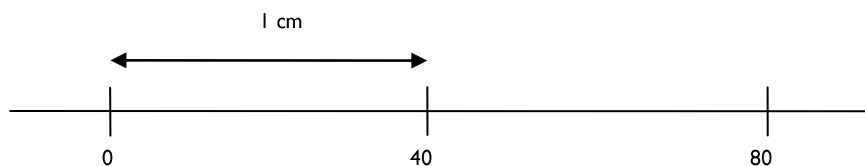


5. ¿Cuántos números naturales hay entre 123 y 221?

6. Juan Carlos camina en línea recta por una calle de su casa a la Universidad, que está a 1200m. En el trayecto se encuentra con una tienda (a 100 m), una gasolinera (a 400 m) y una papelería (a 950 m).

Dibuja una recta numérica y en la misma ubica la casa de Juan Carlos, la Universidad, la tienda, la gasolinera y la papelería.

7. **Problema abierto:** Para dibujar la recta del ejercicio anterior, Juan Carlos quiere usar todo el ancho de la hoja de su cuaderno. Si quiere dibujar una recta con las siguientes características:



¿Le alcanzará la hoja de su cuaderno? Explica tu razonamiento.

8. **Reto:** ¿Cuántos números pares hay entre los números 15756 y 23133? Explica.

3.2 Definiciones operacionales

Primera pasada...

*En las conversaciones cotidianas, comúnmente describimos a los objetos y situaciones usando términos generales como la cantidad, el tamaño, el peso, derecho o curvo. Sin embargo, en la ciencia, es muy importante que la comunicación sea clara. Si las definiciones son precisas y no ambiguas, los científicos pueden verificar los hallazgos de alguien más y avanzar a partir del trabajo de otros científicos. Para esto se necesitan las llamadas **definiciones operacionales**, las cuales no dejan duda acerca del significado de un término técnico.*

Actividad 3.2.1

- 1) A continuación se da el principio de una definición operacional de la “recta numérica”. Los miembros de tu equipo y tu deben completar, individualmente, la definición operacional y después discutir sus respuestas.

Definición operacional de recta numérica:

- a) Dibuja una línea recta y elige un punto sobre ella como el cero.
 - b) Después...
- 2) Imagina que nunca has visto una recta numérica ¿Podrías construir una recta numérica después de leer tu definición operacional?

Actividad 3.2.2

- 1) Da una definición operacional de cuadrado, es decir, los pasos a seguir para construir un cuadrado.
- 2) Imagina que nunca has visto un cuadrado ¿Podrías construirlo después de leer tu definición operacional? Prueba de leerle tus instrucciones a alguien que no sepa para qué son, pídele que dibuje solamente siguiendo tus instrucciones. ¿Dibujó un cuadrado? Si es necesario modifica tu definición.

Actividad 3.2.3

Da una definición operacional de triángulo, rectángulo y círculo. Utiliza los resultados de la sección 1.1 en el capítulo de Perímetro para dar una definición operacional de triángulo rectángulo.



Discute tus respuestas con el profesor.

El propósito de una definición operacional científica es dar la idea más clara posible del significado del término que se está definiendo. La definición operacional de una cantidad, como el área, nos dice qué pasos o qué operaciones se deben realizar para obtener un valor numérico de esa cantidad; la de un objeto, como un círculo, nos dice los pasos que hay que seguir para construirlo o que hay que hacer para poder identificarlo. Estas no describen las aplicaciones que hacen útil un concepto. La pregunta de cómo puede usarse un concepto como el área o la recta numérica es otro asunto. Así, por ejemplo, la definición operacional de una cantidad, como el área, nos debe decir cómo medir la cantidad, no sus aplicaciones.

Las definiciones que se usan en la ciencia son operacionales siempre que sea posible. Desde luego, es importante tanto saber encontrar el valor del área como saber cómo usarlo. Sin embargo, una definición operacional no cubre ambos aspectos, sólo el primero.

Actividad 3.2.4

Construye una definición operacional de longitud. Tu definición operacional debe incluir una descripción del equipo que necesitas para medir una longitud.

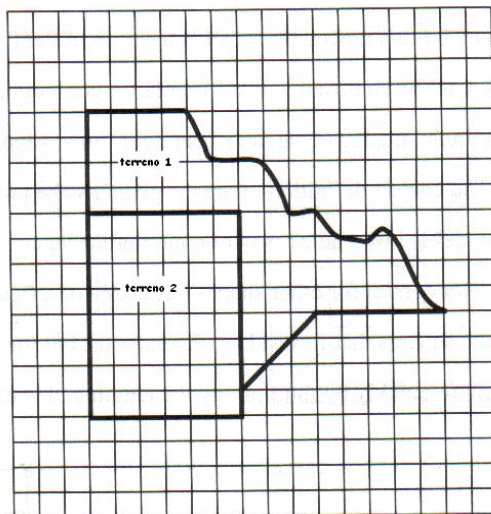
Después, da una definición operacional de distancia. ¿Es lo mismo longitud y distancia? ¿En qué se parecen y en qué son diferentes? Explica.

Actividad 3.2.5²

Supón que quieres comprar un terreno. El agente de ventas te enseña dos. Ambos cuestan lo mismo y la calidad de la tierra es igual en todo sentido, por lo que decides comprar el más grande. Supón que consigues una foto-

² Esta actividad es tan sólo un repaso de lo que ya hicimos en el capítulo anterior. Lo repetimos, un poco diferente, por si las dudas.

grafía aérea de los terrenos, en la que se puede dibujar los bordes de los dos terrenos como se muestra en la siguiente figura. Determina cuál es el terreno más grande.



La mejor manera de comparar el tamaño de los dos terrenos en el ejercicio anterior, es cubrir cada uno de ellos con cuadrados idénticos y contar el número de éstos que se ajusta dentro de los bordes de cada uno de los terrenos. El terreno al que se ajustan más cuadrados es el más grande.

De hecho, esta es exactamente la forma en la que se miden los terrenos. En México, los cuadrados se llaman hectáreas. Para medir áreas más chicas se usan cuadrados más pequeños. Por ejemplo, se podría usar un cuadrado cuyos lados midan un centímetro de largo; a este cuadrado se le llama **centímetro cuadrado** (cm^2).

Existen muchas situaciones en las que es necesario saber qué tan grande es una superficie: para determinar el tamaño de un terreno, el tamaño de una pared que va a ser pintada, el tamaño del piso que tiene que ser recubierto con mosaico, etc. En todos estos casos la superficie se puede medir a través del siguiente procedimiento:

- 1) Ajusta cuadrados de medida estándar dentro de los bordes de la figura que representa a la superficie.
- 2) Cuenta el número de cuadrados que se ajusten dentro de los bordes, estimando la contribución de los cuadrados parciales o fragmentados.

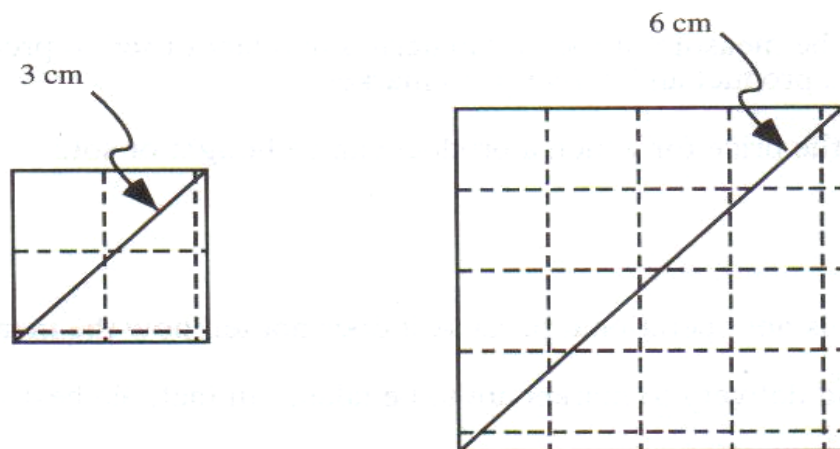
El número obtenido con este procedimiento se llama **área** de la figura. Como vimos en el capítulo anterior, la definición operacional de **área** no debe confundirse con la fórmula usada para calcularla bajo ciertas circunstan-

cias especiales. Por ejemplo, a muchas personas se les ha dicho que el área es “el largo por el ancho”. Esto es generalmente falso. Largo por ancho es sólo una manera rápida de contar cuadrados para el caso particular de los rectángulos y no es válida para otras figuras. El área de una figura siempre se obtiene contando cuántos cuadrados se ajustan dentro de sus bordes, pero para los rectángulos esta cuenta puede hacerse de una manera rápida al multiplicar el largo por el ancho.

La mayoría de las definiciones del diccionario no son operacionales. Por ejemplo, la siguiente definición no-operacional de área fue tomada del diccionario: “Área: la medida de una región acotada o delimitada en un plano”. Esta definición indica que el concepto de área es útil para describir el tamaño de una figura. Sin embargo, no establece cómo se debe determinar el tamaño. Así, una definición como esta deja abierta la posibilidad de confundir el significado exacto de área pues no establece claramente cómo medir el área. Dos personas que quisieran medir el área de la misma figura utilizando esta definición podrían llegar a resultados diferentes. La relevancia de las definiciones operacionales está vinculada con resolver esta problemática. Veamos cómo.

A continuación se muestra un ejemplo de cómo una definición no-operacional puede dar lugar a confusiones. Supón que usamos la definición no operacional de área dada anteriormente, “la medida de una región delimitada de un plano”, para comparar los tamaños de las pantallas de dos televisiones. Las pantallas de televisión son generalmente casi cuadradas, y el tamaño de la pantalla se presenta dando la medida de su diagonal. Una pantalla de 19 pulgadas mide 19 pulgadas desde una de las esquinas hasta la otra opuesta.

Supón que tienes dos pantallas de televisión muy pequeñas. Estas se muestran en el siguiente diagrama: una TV de 3 cm y otra TV de 6 cm.



La definición no-operacional permite que haya distintas formas de hallar “la medida de una región delimitada de un plano”, las cuales entran en conflicto como se muestra en la siguiente actividad.

Actividad 3.2.7

Supongamos que queremos comparar el área de las dos pantallas de la figura anterior y consideramos la definición de área como “la medida de una región delimitada de un plano”.

- 1) Un estudiante decide que medirá la región delimitada de las pantallas midiendo la distancia de una esquina a otra como se muestra en la figura anterior. ¿Es esta forma de medir consistente con la definición? ¿Cuántas veces más grande es el área de la pantalla grande que el área de la pantalla chica si el estudiante aplica esta definición de área? Explica.
- 2) Otro estudiante decide que medirá la región delimitada de las pantallas contando el número de cuadrados de un centímetro de lado que se ajustan a esta región. ¿Es esta forma de medir consistente con la definición? ¿Cuál es el área de cada una de las pantallas si se utiliza esta definición? ¿cuántas veces más grande es el área de la pantalla grande que el área de la pantalla chica aplicando esta definición de área? Explica.
- 3) Compara los resultados de los dos estudiantes. ¿Son iguales? ¿Hay algo en la definición de área como “la medida de una región delimitada de un plano” que determine cuál de las dos formas que eligieron los estudiantes para medir áreas es la correcta? Explica.

Si medimos diagonalmente obtenemos 3 cm y 6 cm. Contando los cuadrados obtenemos 4.5 cm^2 y 18 cm^2 . De acuerdo con el método de la diagonal, puede pensarse que la pantalla grande es del doble de tamaño que la pantalla chica. De acuerdo con el método de conteo de cuadrados, la pantalla grande es cuatro veces más grande que la pequeña. ¡Esto no puede ser! En la ciencia necesitamos una definición que nos lleve a un único resultado. Es por esta razón que la definición operacional de área nos dice exactamente que hacer: contar los cuadrados.

A menudo, las definiciones operacionales se escriben de tal manera que no resulta obvio que en ella se están especificando una serie de operaciones o pasos a seguir. Por ejemplo, la definición operacional de área de una figura que se da en la actividad 3.2.5 puede resumirse en algo como: “El área de

una figura es el número de cuadrados estándar que caben dentro de ella". Aunque esta definición no es una lista de pasos a seguir para obtener el número deseado, deja claro de cualquier manera qué pasos se deben de seguir para obtenerlo.

Para decidir si una definición es operacional o no, es necesario ver si la definición deja claro qué operaciones o pasos se necesitan hacer para: 1) obtener (medir) una cantidad particular, o 2) hacer una prueba específica (que permita identificar un objeto o situación específicos).

Problema ejemplo

¿Cuál de las siguientes definiciones es operacional?

- 1) Pasante de licenciatura: un estudiante que tiene la mayoría de los conocimientos de la carrera.
- 2) Pasante de licenciatura: un estudiante que tiene al menos 80% de créditos de la carrera aprobados y aun no se ha recibido.

Ejemplo de solución

“Ser pasante es una situación específica, de modo que una definición operacional de pasante debe permitirnos identificar, sin duda alguna, si una persona es, o no, pasante. Dicho de otro modo, una definición operacional de pasante nos debe decir que prueba hay que hacer para saber si alguien es pasante o no.

La primera definición no es operacional porque no dice cómo saber si alguien tiene la mayoría de los conocimientos. Con esta definición no podemos decidir, en forma única, si alguien es o no un pasante. Una persona podría decir que el estudiante “X” es pasante pues tiene la mayoría de los conocimientos de la carrera, mientras que otra podría decir que no lo es. Esta definición no nos permite decidir con claridad quién tiene la razón, es decir, si el estudiante “X” es, o no, pasante.

En contraste, la segunda definición si es operacional. Esta definición nos permite establecer en forma única y clara si alguien es un pasante o no. Lo único que necesitamos saber es el porcentaje de los créditos de la carrera que ha aprobado, esta sería la prueba que hay que hacer. En esta definición también se ejemplifica el hecho de que, a veces, los pasos a seguir no están escritos en forma obvia.

Ambas definiciones útiles y tienen su mérito y ciertamente ambas pueden mejorarse. La pregunta acerca de si una definición tiene mérito es, sin embargo, una pregunta independiente de si la definición es operacional.”

Haz el ejercicio de escribir la definición B como un conjunto de pasos a seguir para identificar a un pasante.

Actividad 3.2.8

¿Cuáles de las siguientes definiciones son operacionales? Explica por qué.

- 1) Masa: El número de objetos patrón (por ejemplo, gramos) con los que se equilibra un objeto.
- 2) Masa: la cantidad de materia de un objeto.
- 3) Velocidad media: el cociente de la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.
- 4) Temperatura: la medida del calor o del frío de un cuerpo o del medio ambiente.
- 5) Fracción equivalente: cuando dos fracciones valen lo mismo.
- 6) Rectas perpendiculares: cuando el ángulo entre ellas es de noventa grados.
- 7) Área: el área de un campo es la cantidad de tierra que ocupa.
- 8) Experto: una persona con un vasto conocimiento.
- 9) Círculo: conjunto de todos los puntos del plano que equidistan (i.e., se encuentran a la misma distancia) de un punto dado.

Escribe las definiciones que sean operacionales como un conjunto de pasos u operaciones a seguir.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

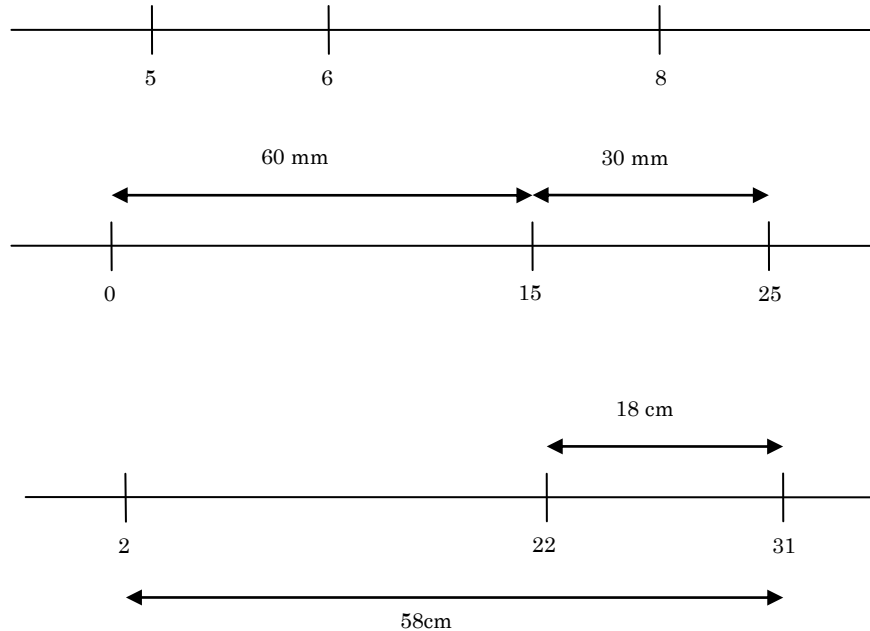
I. Aplica la definición operacional para encontrar el área de los siguientes rectángulos (no vale multiplicar, ¡hay que contar cuadrados!):

- 1) Lado largo= 25 m, lado corto= 20 m
- 2) Lado largo= 7.5 cm, lado corto= 5 cm
- 3) Lado largo= $\frac{1}{2}$ mm, lado corto= $\frac{1}{3}$ mm
- 4) Lado largo= $\frac{3}{4}$ km, lado corto= $\frac{2}{7}$ km
- 5) Lado largo= $\frac{11}{5}$ cm, lado corto= $\frac{4}{3}$ cm

Da tus respuestas en las unidades cuadradas correspondientes (por ejemplo, si los datos están en metros, tu respuesta debe estar en metros cuadrados).

3.3 Autoevaluación

- 1 Indica cuáles de las siguientes rectas están bien hechas y cuáles no. Explica tu respuesta en cada caso.



- a) En las rectas que están bien hechas, indica cuánto vale la unidad.
- b) En las rectas que están bien hechas, ubica el número 10.
- 2 De las siguientes definiciones di cuáles son operacionales y cuáles no. Justifica cada una de tus respuestas con base en los siguientes criterios: Una definición operacional 1) deja claro un procedimiento para obtener lo que se está definiendo, 2) cualquier persona debe obtener el mismo resultado o llegar a la misma conclusión si sigue dicho procedimiento y 3) debe ser lo más general posible o valerse para el mayor número de casos o situaciones posibles.
- a) *Enfermedad*: Alteración más o menos grave de la salud.
- b) *Alerta ambiental*: Cuando la contaminación es mayor que en días normales.

- c) *Alerta ambiental*: Cuando los niveles del IMECA están por arriba de los 160 puntos.
 - d) *Agua potable*: agua consumible sin restricciones por el ser humano.
 - e) *Energía*: Propiedad que permite a un sistema efectuar trabajo.
 - f) *Energía cinética*: Es el número que se obtiene al multiplicar $\frac{1}{2}$ por la masa del objeto y por la velocidad que lleva el objeto al cuadrado.
 - g) *Fiebre en el ser humano*: Si al poner por lo menos tres minutos el termómetro bajo la axila de una persona marca 37°C o más.
 - h) *Volumen*: Número de cubos estándar que se ajustan al interior de una frontera tridimensional dada.
- 3 Escribe sólo las definiciones que sí sean operacionales del ejercicio anterior como una serie de pasos o instrucciones. Explica.
- 4 Escribe una definición operacional de:
- a) Recta numérica.
 - b) Distancia.
 - c) Área.
 - d) Centímetro cuadrado.
 - e) Polígono regular.
 - f) Rectas paralelas.

Objetivos de aprendizaje del capítulo 3

Después de haber terminado este capítulo debes de ser capaz de hacer las siguientes cosas:

- 1 Construir la recta numérica y ubicar números naturales. Identificar los dos elementos de la recta numérica: punto arbitrario (0) y unidad de medida.
- 2 Construir una recta numérica conociendo:
 - a) Punto arbitrario y unidad de medida.
 - b) Dos puntos de la misma.
- 3 Ubicar un número conociendo la distancia entre otros dos.
- 4 Enunciar definiciones operacionales de: recta numérica, rectángulo, triángulo, círculo, longitud, distancia y área.
- 5 Distinguir si una definición es operacional o no y explicar por qué en cualquiera de los dos casos.
- 6 Explicar con tus propias palabras por qué la expresión “largo por ancho” no es una *buena* definición operacional de área (¡aunque si es una definición operacional! ¿Podrías explicar por qué?).
- 7 Explicar para qué sirven o por qué son útiles las definiciones operacionales.
- 8 Explicar con tus propias palabras cómo distinguir si una definición es operacional o no.

CAPÍTULO 4

Fracciones

El juego del “numerito” (adaptación)

Adrián Paenza¹

Cuando era chico, mi padre me enseñó un juego muy divertido. Lo jugamos muchísimas veces y consumíamos el tiempo entretenidos, pensando. Más tarde, con el correr del tiempo, solo lo jugué con algunas personas y amigos, pero en quien más prendió fue en Víctor Hugo. Con el también lo jugué muchísimo, en nuestros infinitos viajes en avión y en las largas esperas en hoteles, aeropuertos, durante los campeonatos del mundo o, incluso, en viajes en auto. El juego consiste en que cada participante elija cuatro de los diez dígitos posibles, sin repetir, y los anote en alguna parte. Como el orden en que estén escritos importa, no es lo mismo haber elegido

1 2 3 4

que

4 1 3 2

Si bien los números son los mismos, la posición en la que aparecen los distingue. Digamos, para fijar ideas, que yo elijo

1 4 2 5

y los anoto. A su vez, el otro jugador eligió (sin que yo lo sepa ni que él vea los míos)

0 7 2 6

El objetivo del juego es, naturalmente, descubrir el número (o numerito, como solía llamarlo mi padre) que tiene el rival.

Empieza alguno de los dos (y se verá después que ser el primero se compensa con lo que puede hacer el otro) diciendo un posible número de cuatro cifras que se supone tiene su rival.

Obviamente, si uno acierta con este intento, abandona el juego inmediatamente y vuela a Las Vegas y a Montecarlo. Luego de comprar ambas ciudades, vuelve a su país de origen como Rey del Universo. Para eso, tiene que probar que siempre puede acertar el número que eligió el otro, sea el que sea.

¹ Paenza, Adrián. *Matemáticas... ¿estás ahí?, sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina, 2005 págs. 46-49.

Bromas aparte, uno tiene que empezar con algún número y, por eso, elige tentativamente.

Digamos que empezó mi rival y eligió decir:

8 4 7 2

Como el número que yo elegí es el 1 4 2 5, le contesto que tiene uno *bien* y uno *regular*.

¿Cómo se entiende esto? Es que él acertó con el número 4 pero además acertó la posición del 4, porque lo ubicó en el segundo lugar. Ese es el dígito que está bien, aunque no le diga cuál es. Yo sólo respondo un “bien”.

¿Cuál es el *regular*? Al decir el 8 4 7 2 también acertó con el número 2, que yo elegí entre mis dígitos, pero en este caso erró la posición. Mientras que yo tengo el número 2 ubicado en la segunda posición, mi rival lo ubicó en la cuarta.

Y ahora, me toca a mí, Repito el proceso, intentando acertar con un intento. El juego continúa hasta que uno de los dos llega a descubrir el numerito del otro. Si el que llega primero es el que empezó primero, entonces el otro participante tiene un tiro. Para completar ambos la misma cantidad de intentos. En cambio, si el que llega primero es el que empezó segundo, el juego termina ahí.

El problema resulta apasionante, y ofrece una multiplicidad de alternativas para pensar. No es fácil, pero tampoco difícil, y sirve de entrenamiento mental. Lo invito a que lo pruebe.

Más pedestre, y para evitar algunas cuestiones logísticas menores:

Si alguien intenta con un número y no acierta con ninguno de los dígitos, la respuesta de la otra persona será “*Todos mal*”. Aunque uno no lo crea en principio, es muy provechoso empezar así, aunque no sea porque elimina de inmediato cuatro de los diez dígitos posibles que se pueden elegir.

Hay veces en que uno llega a reducir las posibilidades a dos números posibles, por ejemplo, 1452 y 1429. En este caso, con el pasar del tiempo, Víctor Hugo me convenció de que si alguien llega a esta situación, debería ganar, salvo que la otra persona en el tiro que le queda acierte sin tener que optar.

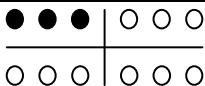
Como usted advierte, las reglas las establece uno. Y en principio la Corte de la Haya no ha recibido quejas, al menos, hasta la última vez que yo lo chequé, que fue en septiembre de 2006.

Actividad 4.0.1

- 1) Juega con un compañero el juego del “numerito”. ¿Cuántos intentos les tomó terminarlo?
- 2) En el texto, se menciona que para jugar debe uno elegir cualquiera cuatro de los 10 dígitos. ¿cómo le explicarías a un amigo la mecánica del juego, si en vez de tomar diez dígitos, se permitieran sólo el 0,1,2,3,4,5?
- 3) Haz el juego con un compañero, usando sólo 3 dígitos. ¿Cuántos pasos les tomó en esta ocasión?
- 4) Describe con tus palabras lo que harías para intentar ganar el juego.

4.1 Fracciones**Actividad 4.1.1**

En un kilogramo de fresas hay, aproximadamente, 12 de estas frutas, con este dato completa la siguiente tabla.

Fracción respecto del total (12 fresas)	Número de fresas correspondiente a la fracción indicada	Explicación (cómo se obtiene el número de fresas a partir de la fracción)	Esquema
$\frac{1}{2}$			
	4		
		divido el total en 4 partes iguales y tomo 3 de esas partes	
			
	8		

Actividad 4.1.2

Claudia y Juan discuten acerca de cómo encontrar $\frac{2}{3}$ de un total de 12 fresas.

Claudia: “Hay que dividir el total en 3 partes iguales (de 4 fresas cada una), y luego se toman dos de esas partes, es decir: 8 fresas.”

Juan: “Hay que dividir el total en 2 partes (de 6 fresas cada una), y luego tomar 3 de esas partes, es decir: 18 fresas.”

- 1) ¿Con quién estarías de acuerdo? Anota tu explicación.
- 2) Explica con tus palabras qué te indica el número de abajo (llamado denominador de la fracción) y que te indica el número de arriba (llamado numerador de la fracción).

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. El mes de abril tiene 30 días e inicia un lunes. Completa la siguiente tabla.

Días	Fracción que representan del mes
Jueves	4/30
Lunes	
Sábados y domingos	
Lunes, martes, miércoles y jueves	

2. En una carrera de bicicletas participan 48 estudiantes. Lee las pistas y anota en tu bitácora de trabajo los datos que se te solicitan:

- Las bicicletas son rojas o azules.
- Entre los participantes hay 12 mujeres.
- Hay 8 mujeres que corren con bicicleta azul.
- Hay 6 hombres que corren con bicicleta roja.

- 1) ¿Qué fracción del total de hombres corren en bicicleta azul?
- 2) ¿Qué fracción del total de participantes representan las mujeres que corren con bicicleta roja?

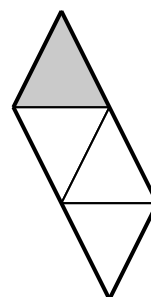
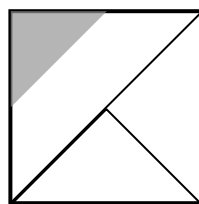
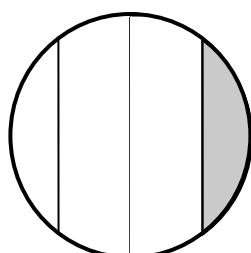
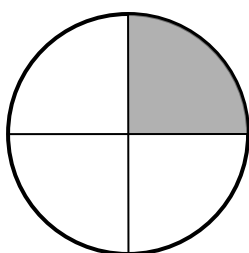
- 3) ¿Qué fracción del total de participantes representan los que corren en bicicleta de color rojo?
- 4) ¿Qué fracción del total de participantes representan las mujeres?

3. Tres cantantes participan en un coro musical. El segundo inicia cuando el primer cantante repite por segunda vez su estrofa; mientras el tercer cantante comienza cuando el primero canta por tercera vez su parte. Tomando en cuenta que las estrofas de los tres cantantes son iguales, y que cada uno termina después de repetirla cuatro veces, determina la fracción del tiempo total en el que los tres están cantando en el mismo momento.

Representa la situación con un esquema en tu bitácora de trabajo.

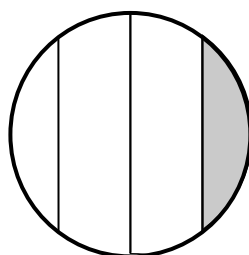
Actividad 4.1.3

Indica cuáles de las siguientes figuras la región sombreada representan la fracción $\frac{1}{4}$ y cuáles no. Explica por qué.



Actividad 4.1.4

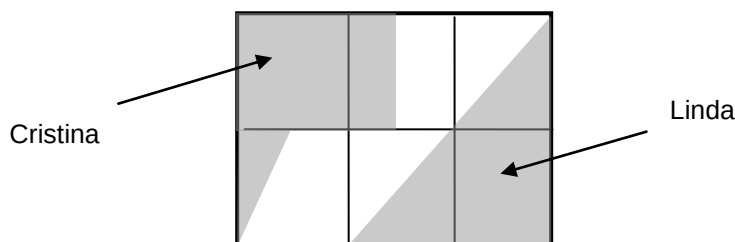
Imagina que estas platicando con un primo que no sabe nada de fracciones. Escribe un diálogo, en el cual le explicas por qué la siguiente región NO representa $\frac{1}{4}$.



 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 4.1.5

En el siguiente esquema se muestran las partes de un pastel que Cristina y Linda comieron, respectivamente.



- 1) ¿Quién comió más: Linda o Cristina? Explica tu respuesta.
- 2) ¿Qué fracción del pastel comió cada una?

Actividad 4.1.6

Representa en un esquema las fracciones indicadas en cada inciso y señala cuál es mayor.

a) $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$

b) $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$

Actividad 4.1.7

Usa los resultados de la actividad anterior y responde las siguientes preguntas explicando tu respuesta en cada caso.

Supongamos que un grupo de estudiantes se reunieron a comer pizzas.

- 1) La pizza de pollo chica fue cortada en 7 partes (no necesariamente iguales). Carmen se comió dos de las porciones mientras que Alfredo tres ¿quién comió más?
- 2) De la pizza vegetariana grande Pablo se comió $\frac{1}{5}$ y Lucrecia $\frac{1}{4}$, ¿quién comió más?
- 3) Blanca se comió $\frac{1}{2}$ de la pizza hawaiana extra-grande; mientras que Nallely se comió $\frac{2}{3}$ de la pizza de mariscos grande, ¿quién comió más?

Actividad 4.1.8

- 1) Explica cómo se comparan dos fracciones usando un esquema. Al hacerlo piensa cómo tienen que ser los enteros, cómo tienen que ser las partes en que se dividen, etc.
- 2) Escribe dos ejemplos de cosas que no se deben hacer al comparar dos fracciones a través de un esquema.
- 3) Vuelve a revisar la Actividad 4.1.6 y verifica si lo que hiciste es correcto.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. María compra un pastel y lo divide en partes iguales entre sus cuatro hijos. Ana y Benito se comen sus trozos completos, pero Carlos se come sólo la mitad de su parte y Diana sólo un cuarto de ella.

- 1) Representa la situación en un esquema.
- 2) ¿Cuánto pastel quedó?

2. Usa un esquema y ordena las siguientes fracciones de mayor a menor:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{3}{4}$$

4.2 Fracciones con igual denominador

Actividad 4.2.1

- 1) Representa en un esquema las fracciones indicadas en cada inciso. Ordénalas de mayor a menor.

a) $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}$ y $\frac{5}{7}$

c) $\frac{2}{10}, \frac{5}{10}$ y $\frac{7}{10}$

- 2) Tomando como base lo que hiciste en el ejercicio anterior y sin hacer un esquema trata de calcular qué fracción es mayor y cuál es la menor. Completa con los signos $<$ ó $>$ (menor que o mayor que) según corresponda.

a) $\frac{2}{3} \square \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{11} \square \frac{6}{11}$

c) $\frac{5}{6} \square \frac{7}{6}$

- 3) ¿Qué tienen en común las fracciones de los incisos anteriores que las hace fáciles de comparar?
- 4) Explica cómo se comparan fracciones que tienen el mismo denominador.

Actividad 4.2.2

Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor. Si lo consideras necesario realiza un esquema.

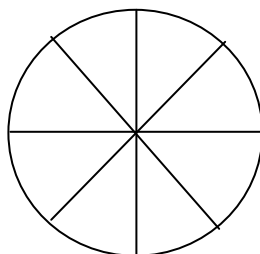
$$\frac{1}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{7}{10}$$

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 4.2.3

De una misma pizza Joaquín se llevó a su casa $\frac{5}{8}$ y Paola $\frac{2}{8}$.

- 5) Representa en un esquema las porciones que tomó cada uno.



- 6) Indica, en el esquema, la porción de pizza que se llevaron entre los dos y qué fracción representa.
- 7) ¿Cuál de las siguientes operaciones representa la porción de pizza que se llevaron entre los dos?

a) $\frac{2}{8} + \frac{5}{8}$

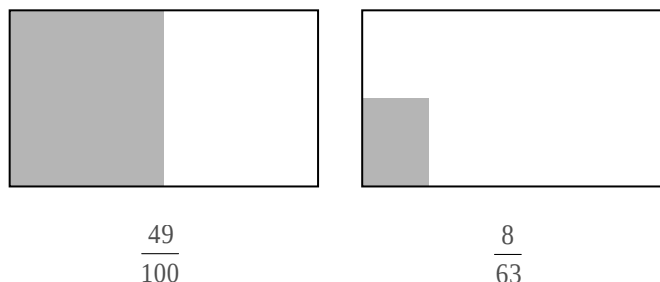
b) $\frac{5}{8} - \frac{2}{8}$

c) $5 \times \frac{2}{8}$

d) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$

Actividad 4.2.4

En las siguientes figuras se muestran las fracciones $\frac{49}{100}$ y $\frac{8}{63}$:



¿Cuál de las siguientes regiones representa la suma $\frac{49}{100} + \frac{8}{63}$? Explica tu respuesta.



Actividad 4.2.5

Supón que tienes dos fracciones y quieres hacer la suma de las mismas mediante un esquema. Explica cómo se dibuja en el esquema la región que representa el resultado de la suma. Al hacerlo, deberás usar la palabra *agregar*.

Discute tus respuestas con el profesor.

Actividad 4.2.6

- 1) Realiza las siguientes sumas de fracciones representando cada fracción en un esquema (como en la actividad anterior).

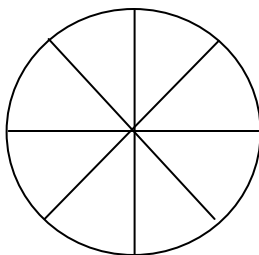
$$a) \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \qquad b) \frac{2}{9} + \frac{5}{9} \qquad c) \frac{2}{17} + \frac{6}{17} + \frac{5}{17}$$

- 2) Explica, con tus palabras, cómo se suman las fracciones de igual denominador sin necesidad de hacer un esquema.

Discute tus respuestas con el profesor.

Actividad 4.2.7

- 1) Joaquín llegó a su casa con $\frac{5}{8}$ de pizza y se comió $\frac{2}{8}$. ¿Qué porción de pizza le queda? Representa la situación en un esquema.



- 2) ¿Cuál de las siguientes operaciones representa la porción de pizza que le queda a Joaquín?

a) $\frac{2}{8} + \frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{8} - \frac{2}{8}$ c) $\frac{3}{8} \times \frac{2}{8}$ d) $\frac{2}{8} - \frac{5}{8}$

Actividad 4.2.8

En las siguientes figuras se muestran las fracciones $\frac{49}{100}$ y $\frac{8}{63}$:

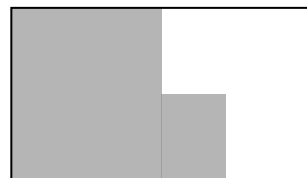
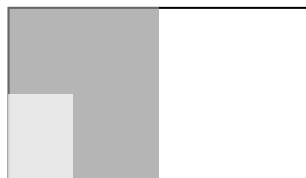
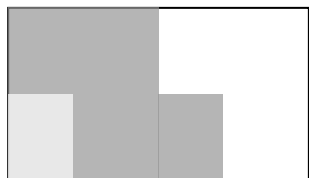


$$\frac{49}{100}$$



$$\frac{8}{63}$$

¿Cuál de las siguientes regiones representa la resta $\frac{49}{100} - \frac{8}{63}$? Explica tu respuesta.



Actividad 4.2.9

Supón que tienes dos fracciones y quieres hacer la resta de la primera menos la segunda mediante un esquema. Al hacerlo considera que la primera es mayor que la segunda. Explica cómo se dibuja en el esquema la región que representa el resultado de la resta. Al hacerlo, usa la palabra *quitar*.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 4.2.10

- 1) Realiza las siguientes restas de fracciones representando cada fracción en un esquema. Explica tu respuesta.

$$a) \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \quad b) \frac{5}{9} - \frac{3}{9} \quad c) \frac{9}{13} - \frac{2}{13}$$

- 2) Explica, en tus propias palabras, cómo se restan las fracciones de igual denominador sin necesidad de hacer un esquema.

4.3 Suma y resta de fracciones usando esquemas**Actividad 4.3.1**

Realiza las siguientes operaciones representando cada fracción en un esquema.

$$a) \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \quad b) \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$$

Actividad 4.3.2

Respecto a la actividad anterior, Leandro dice que: “Para realizar estas operaciones de la manera más sencilla, conviene dividir en la primera de las sumas el entero en 9 partes, y en la segunda en 15 partes”.

Usa los siguientes diagramas para graficar las operaciones como las realizó Leandro y verifica si tus resultados coinciden.

$$a) \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$$

--	--	--	--	--	--	--	--	--

$$b) \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Actividad 4.3.3

Realiza las siguientes operaciones representando cada fracción en un esquema.

a) $\frac{1}{4} + \frac{5}{12}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{5} - \frac{6}{15}$

d) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

e) $1 - \frac{3}{7}$

Actividad 4.3.4

Imagina que tienes que sumar o restar dos fracciones usando un esquema. Explica cómo encuentras el número adecuado con el que tienes que dividir el entero para que se simplifique el dibujo. Incluye, al final de tu explicación, por lo menos tres ejemplos distintos a los vistos anteriormente.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

I. Realiza las siguientes operaciones representando cada fracción en un esquema:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{12}$

b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{30}$

c) $\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{4}\right) - \frac{1}{2}$

d) $1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\right)$

4.4 Interpretación de números calculados**Actividad 4.4.1**

Rogelio tiene 100 dulces. El jueves en la mañana le regala 34 a Marcela y por la tarde le regala 16 a Bety. Encuentra qué operación resuelve cada pregunta.

a) $100 - 34$

b) $100 - (34 + 16)$

c) $34 + 16$

- 1) ¿Cuántos dulces le quedaron?
- 2) ¿Cuántos dulces le regaló a Marcela y a Bety juntas?
- 3) ¿Cuántos dulces tenía Rogelio el jueves al medio día?

Actividad 4.4.2

La distancia entre México y Acapulco es de aproximadamente 400 km. Jorge realizó el viaje entre estas ciudades en tres días. El primer día recorrió 112 km. El segundo día recorrió 35 km, y el tercer día el resto.

¿Qué preguntas harías cuya respuesta sea el resultado de la operación indicada en cada inciso? Observa el ejemplo.

- 1) $112+35$ ¿Cuál es la distancia que recorrió Jorge en los dos primeros días?
- 2) 400
- 3) 112
- 4) $400-112$
- 5) $400-(112+35)$

Actividad 4.4.3

Escribe, en cada caso, el enunciado de un problema que se resuelva mediante la operación indicada en cada inciso.

a) $23 - 15$

b) $46 - (16 + 5)$

Actividad 4.4.4

Tomando en cuenta las actividades 1 y 3 completa la siguiente tabla:

Operación	Pregunta cuya respuesta es el resultado de la operación	Qué nos dice la operación
$100 - 34$		Número de dulces que tenía Rogelio al mediodía
$100 - (34 + 16)$		
$34 + 16$	¿Cuántos dulces le regaló Rogelio a Marcela y Bety juntas?	
$23 - 15$		
$46 - (16 + 5)$		

En la actividad anterior se te pidió que explicaras qué indica un número (que puede ser el resultado de una operación) acerca de una situación parti-

cular. Usualmente a esto se le llama una interpretación. Una interpretación es una afirmación acerca de lo que el número nos dice.

Es esencial entender que una operación como $100 - 34$ es un número, no dos números. Este “número es el número de dulces que tenía Rogelio al mediodía”. Restando 34 a 100, encontramos que el número es 66. Ambos, 66 y $100 - 34$, significan exactamente la misma cosa.

Observa, además, que $100 - 34$ tiene una interpretación en el contexto de un problema en particular. Si no, es simplemente la resta de dos números.

Actividad 4.4.5

Observa los ejemplos de la Actividad 4.4.4 ¿qué relación hay entre la pregunta cuya respuesta es el resultado de la operación y qué nos dice la operación (Interpretación)?

Actividad 4.4.6

Un padre heredó a sus tres hijos un terreno. Al mayor le tocó un $\frac{1}{2}$ del área del terreno, al hijo de en medio un $\frac{1}{3}$ al menor el resto.

- 1) Realiza un esquema que represente la situación como lo hiciste en los casos anteriores.
- 2) ¿Qué fracción del terreno le corresponde al hijo menor?
- 3) Completa la siguiente tabla (usa tu esquema para encontrar el resultado de las operaciones de la última columna).

Operación	Pregunta cuya respuesta es el resultado de la operación	Interpretación	Resultado
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$			
		Fracción del terreno que le corresponde al hijo del medio y menor juntos	
			$\frac{1}{6}$

 Discute tus respuestas con el profesor.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Un terreno rectangular está dividido en seis partes iguales y sólo se ha sembrado en cuatro de ellas.

- 1) Realiza un esquema que represente la situación.
- 2) ¿Qué parte del terreno *no* se ha sembrado?
- 3) ¿Qué operación representa la parte del terreno no sembrada?

2. Jacinta tiene una jarra con 1 litro de leche. En un vaso vierte $\frac{5}{8}$ y en una taza $\frac{1}{4}$ del litro.

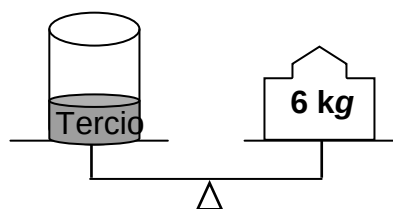
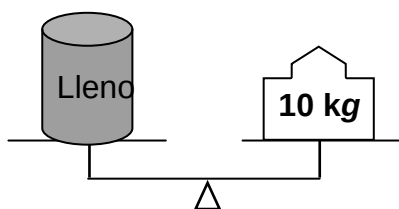
- 1) Representa la situación en un esquema.
- 2) Completa la siguiente tabla:

Operación	Interpretación	Resultado
$\frac{5}{8} + \frac{1}{4}$		
	Cantidad de leche que hay en la jarra y en la taza juntas	
		$\frac{1}{8}$

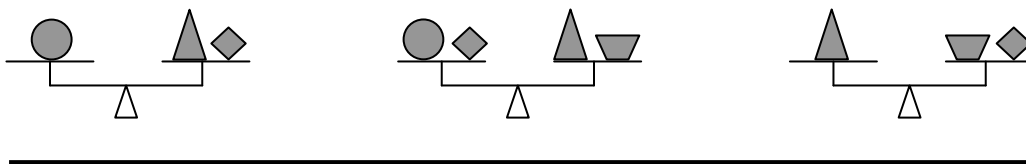
3. Rodrigo tiene 1m de tela y corta un pedazo correspondiente a $\frac{5}{7}$, que a su vez divide en 10 partes iguales.

- 1) Representa la situación en un esquema.
- 2) ¿Qué fracción del total representa cada uno de los diez pedacitos?

4. Al pesar un envase lleno de líquido tiene una masa de 10kg, mientras que, si vaciamos $\frac{2}{3}$, la masa final es de 6kg. Observa las balanzas y di ¿cuánto pesa el envase vacío? Explica tu razonamiento.



5. Observa las balanzas en equilibrio: Si el trapecio pesa $\frac{1}{2}$ kg ¿cuánto pesa cada una de las figuras? Toma en cuenta que el tamaño no está relacionado con la masa de la figura.



4.5 Fracciones impropias

Actividad 4.5.1

Daniel quiere llenar el tanque de agua de su tortuga y lo logra con vaciarle 6 cubetas llenas de agua. Sin embargo, durante el traslado, de la llave a la pecera, un cuarto del líquido se pierde ¿Cuántos viajes debe hacer Daniel para llenar la pecera? Representa la situación en un esquema.

Actividad 4.5.2

Raúl se comió $\frac{4}{5}$ de un pastel en la mañana y $\frac{2}{5}$ por la noche, mientras que Iván se comió $\frac{6}{10}$.

- 1) Representa en un esquema la cantidad de pastel que se comió Raúl.
- 2) ¿Qué fracción de pastel se comió Raúl?

$$a) \frac{6}{10} \quad b) \frac{6}{5} \quad c) \frac{1}{5}$$

- 3) Representa en un esquema la fracción que comió Iván.
- 4) ¿Quién comió más, Iván o Raúl?

Actividad 4.5.3

Tres estudiantes de la UACM compraron cinco tortas las cuales repartieron en partes iguales.



- 1) Colorea en los rectángulos la parte que le corresponde a cada estudiante.
- 2) ¿Qué fracción representa las regiones coloreadas? Explica tu razonamiento.

Actividad 4.5.4

Carlos y Beatriz discuten cómo resolvieron el problema anterior.

Carlos: "Si tomamos el entero como una torta, a cada estudiante le tocan $\frac{5}{15}$ de ella, ya que dividen todas en 15 partes y a cada uno le corresponden 5 partes."

Beatriz: "A cada uno le tocan $\frac{5}{3}$ de torta (tomando cada una como un entero), ya que dividen cada torta en 3 partes y a cada uno le corresponden 5 partes."

¿Con quién estás de acuerdo? Explica tu razonamiento.

Actividad 4.5.5

Imagina que te dan a elegir entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ de pizza.

- 1) ¿Cuál de las cantidades escogerías? ¿Por qué?
- 2) Representa estas cantidades en un esquema.

Actividad 4.5.6

Las fracciones en las cuales el numerador es mayor que el denominador se llaman *impropias*. Por otro lado, las fracciones cuyo numerador es menor que su denominador se llaman *propias*.

- 1) Escribe dos ejemplos de fracciones propias y dos ejemplos de fracciones impropias. Representalas en un esquema.
- 2) Las fracciones propias representan un número menor que 1 y las impropias representan un número mayor que 1. Explica en tu bitácora por qué es así.
- 3) ¿Qué número representan las fracciones cuyo numerador es igual a su denominador?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa en un esquema las siguientes fracciones y ordénalas de menor a mayor.

$$\frac{5}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{15}{7} \quad \frac{11}{2} \quad \frac{4}{3}$$

2. Realiza las siguientes operaciones representando cada fracción en un esquema.

$$a) 2 - \frac{1}{2} \quad b) \frac{3}{5} + \frac{4}{3} \quad c) \frac{7}{6} - \frac{1}{2} \quad d) \frac{13}{3} - \frac{5}{4}$$

Actividad 4.5.7

Otra manera equivalente de representar una fracción impropia es usando los **números mixtos**.

- 1) Representa en un diagrama la fracción $\frac{13}{3}$.
- 2) ¿A cuál de los siguientes números mixtos equivale la fracción $\frac{13}{3}$?
¿Por qué?

$$1\frac{1}{3} \quad 2\frac{1}{3} \quad 3\frac{1}{3} \quad 4\frac{1}{3} \quad 3\frac{1}{4}$$

- 3) Elizabeth dice que $2\frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{5}$. Sin embargo, Patricio no está de acuerdo, ya que $2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ y $\frac{11}{5}$ es distinto de $2\frac{1}{5}$. ¿Con quién estas de acuerdo? Explica tu respuesta.

- 4) Expresa los siguientes números mixtos como fracciones impropias.

$$a) 1\frac{1}{3} \quad b) 2\frac{1}{5} \quad c) 3\frac{2}{3} \quad d) 10\frac{5}{7} \quad e) 9\frac{107}{205}$$

- 5) Expresa las siguientes fracciones impropias como números mixtos.

$$a) \frac{5}{2} \quad b) \frac{7}{2} \quad c) \frac{23}{3} \quad d) \frac{61}{2} \quad e) \frac{1327}{85}$$

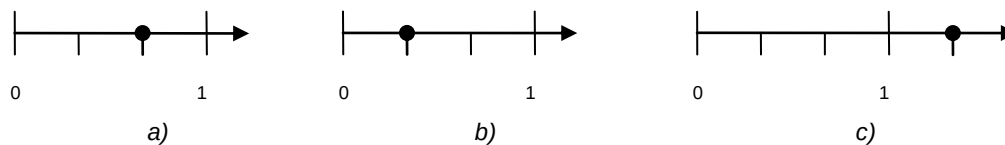
- 6) Explica qué hay que hacer para expresar un número mixto como fracción impropia, y qué hay que hacer para expresar una fracción impropia como número mixto.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

4.6 Ubicando fracciones en la recta numérica

Actividad 4.6.1

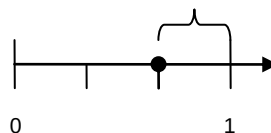
La ubicación de $\frac{1}{3}$ en la recta numérica es:



Explica tu respuesta.

Actividad 4.6.2

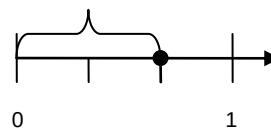
Jorge dice que la respuesta correcta de la actividad anterior es a , ya que dividimos el entero en 3 partes y tomamos una de ellas, de la siguiente manera:



¿Estás de acuerdo con Jorge? Explica tu argumento.

Actividad 4.6.3

Clara no está de acuerdo con Jorge. Ella dice que a es $\frac{2}{3}$, ya que si bien dividimos en 3 partes sólo tomamos dos de ellas, de la siguiente forma:



¿Con quién estás de acuerdo ahora? Explica tu respuesta.

Actividad 4.6.4

Explica, en tu bitácora de trabajo, cómo se ubica una fracción en la recta numérica. ¿Qué similitudes y qué diferencias hay al representar una fracción en un esquema o en la recta numérica?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Según los historiadores, en la antigua China ya se jugaba al Tangram para hacer figuras geométricas; al cual se llamaban el juego de la sabiduría o de las siete habilidades.

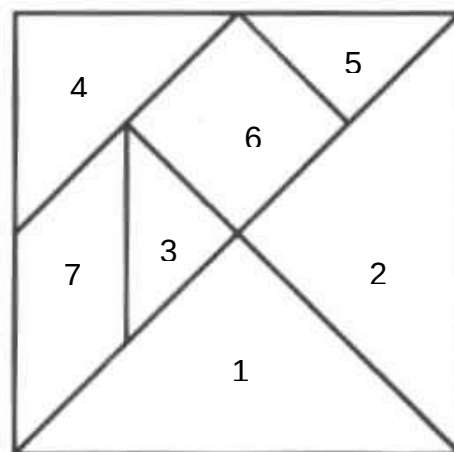
1) Usa el Tangram de la figura y compara las piezas:

¿Cuál pieza tiene mayor área la 3 o la 5?

¿Cuántas veces es mayor el área de la pieza 7 que el área de la 3?

¿Cuántas veces es menor el área de la pieza 6 que el área de la 1?

¿Cuántas veces es mayor el área de la pieza 6 que el área de la 7?

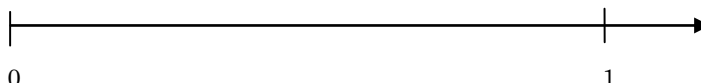


2. Completa la tabla utilizando las siete piezas del Tangram.

Pieza	1	2	3	4	5	6	7
Parte del cuadrado	$\frac{1}{4}$						

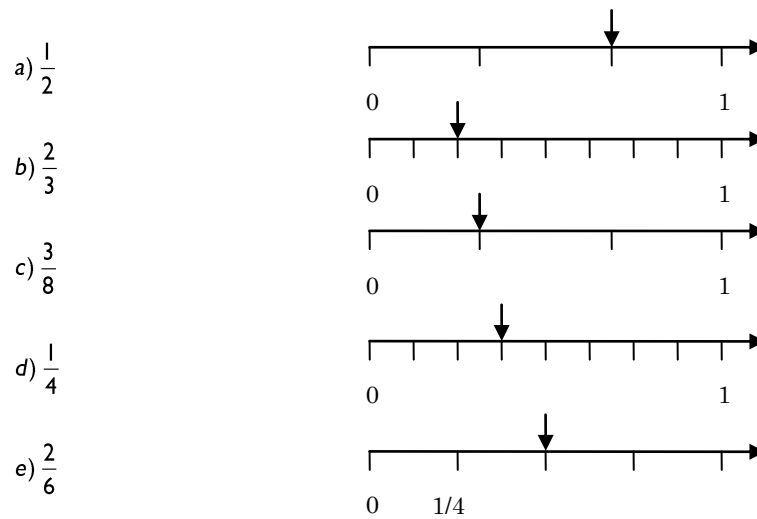
1) ¿Cuál de las fracciones anteriores es la mayor?, ¿cuál es la menor?

2) Ubica en la siguiente recta numérica las fracciones obtenidas en la tabla anterior.



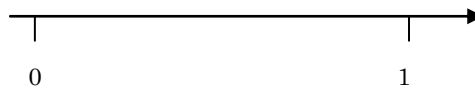
2. Tres hormigas caminan a lo largo de una recta numérica. Cuando se cansan, la hormiga María se sienta en el número 24, la hormiga Ana se sienta en el número 66 y la hormiga Carmen se sienta entre María y Ana, es decir, a dos tercios de la distancia que hay entre María a Ana; quedando más cerca de Ana que de María ¿En cuál número está Carmen sentada?

3. Indica cuáles de las fracciones de la izquierda corresponden a la ubicación en la recta numérica que aparece a la derecha.

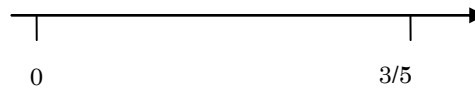


4. Ubica en cada recta numérica las fracciones indicadas. Explica tu razonamiento.

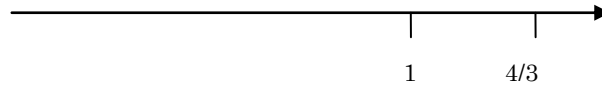
$$\frac{1}{3} \text{ y } \frac{7}{6}$$



$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{4}$$



4.7 Fracciones equivalentes

Actividad 4.7.1

Representa en un esquema las siguientes fracciones y ordénalas de mayor a menor.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{10}{20}$$

Actividad 4.7.2

Considerando nuevamente el problema de las doce fresas que se vio en la actividad número 1 de la sección 1.1.

- Determina el número de fresas que corresponden a cada una de las siguientes fracciones:

Fracción	Número de fresas	Fracción	Número de fresas
$\frac{1}{2}$	6	$\frac{3}{6}$	
$\frac{4}{6}$		$\frac{8}{12}$	
$\frac{12}{24}$		$\frac{2}{4}$	
$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{12}$	

- Como habrás notado, hay fracciones que representan el mismo número de fresas. Indica cuáles son.

6 fresas $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}$ _____

8 fresas $\longrightarrow$ _____

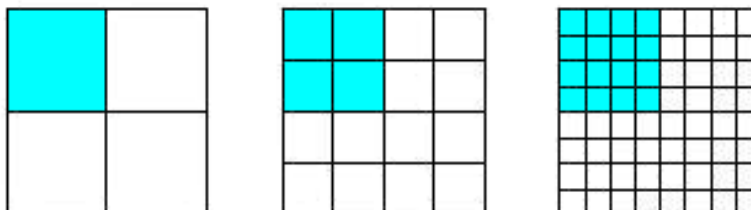
9 fresas $\longrightarrow$ _____

3 fresas $\longrightarrow$ _____

Como cada conjunto de fracciones representa el mismo número de fresas, entonces estas fracciones se denominan *fracciones equivalentes*.

Actividad 4.7.3

Observa las siguientes figuras.



- ¿Qué fracción representa la zona sombreada en cada figura?

Si te ofrecen entre $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{16}$ y $\frac{16}{64}$ de un pastel, ¿cuál elegirías? ¿por qué?

Actividad 4.7.4

Reflexiona acerca de lo que viste en las actividades anteriores y responde:

- 1) ¿Podrías encontrar tres fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$?
- 2) Explica en tus propias palabras un método para obtener una fracción equivalente a partir de otra fracción sin necesidad de usar un esquema.

Actividad 4.7.5

Edith y Matías discuten cómo obtener una fracción equivalente a $\frac{1}{3}$.

Edith: “Hay que sumar el mismo número, por ejemplo el 2, al numerador y al denominador de la fracción. De esta manera encontraremos que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{3}{5}$ ya que: $\frac{3}{5} = \frac{1+2}{3+2}$ ”.

Matías: “No estoy de acuerdo con Edith. Hay que multiplicar por el mismo número el numerador y el denominador, en este caso el 2. Usando este procedimiento encontramos que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$; ya que: $\frac{2}{6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2}$ ”.

- 1) ¿Con quién estas de acuerdo? Explica tu respuesta.
- 2) El método que consideraste correcto, ¿coincide con el que propusiste en el actividad 4? Explica tu razonamiento.

Actividad 4.7.6

Marco Antonio afirma lo siguiente: “Si dividimos el numerador y el denominador de una fracción entre un mismo número, obtendremos una fracción equivalente a la dada”.

- 1) Si tenemos la fracción $\frac{12}{15}$ y dividimos el numerador y el denominador entre 3, ¿qué fracción encontramos?
- 2) ¿Son equivalentes estas dos fracciones?, ¿tiene razón Marcos? Explica tu respuesta.

Actividad 4.7.7

Determina si los siguientes pares de fracciones son equivalentes o no y explica tu razonamiento.

$$a) \frac{2}{3} \text{ y } \frac{12}{18} \quad b) \frac{32}{40} \text{ y } \frac{4}{5} \quad c) \frac{4}{3} \text{ y } \frac{7}{6} \quad d) \frac{84}{108} \text{ y } \frac{7}{9}$$

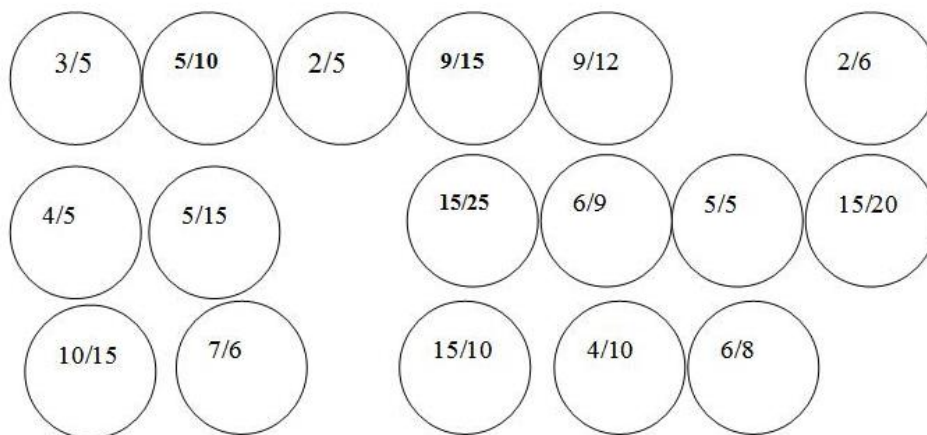
Actividad 4.7.8

Explica con tus propias palabras qué significa que dos fracciones equivalentes. Incluye, además, la explicación de cómo se puede obtener una fracción equivalente a una fracción dada. Para que tu explicación sea más clara, introduce algunos ejemplos distintos a los de las actividades anteriores.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

I. *Mensaje en clave*. Cada una de las letras de esta oración se tapó con una ficha. Las que tienen fracciones equivalentes tapan letras iguales, mientras que las fichas con fracciones distintas tapan letras distintas. Para facilitar la tarea te decimos que: $\frac{1}{3} = A$ (es decir, las fichas cuya fracción es $\frac{1}{3}$ o sus equivalentes tapan la letra A), de esta manera; $\frac{2}{3} = E$, $\frac{1}{2} = I$, $\frac{3}{4} = O$ y $\frac{3}{2} = U$. ¿Qué dice el mensaje?



4.8 Comparación de fracciones

Actividad 4.8.1

- 1) ¿Qué fracción es mayor: $\frac{3}{11}$ ó $\frac{7}{11}$? Escribe, nuevamente, cómo puedes comparar dos fracciones con igual denominador.
- 2) Imagina que queremos comparar dos fracciones con distinto denominador, por ejemplo: $\frac{3}{5}$ ó $\frac{1}{3}$. Para hacerlo podemos usar el siguiente truco: escribimos fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$ y a $\frac{1}{3}$, ambas con el mismo denominador. Por ejemplo, $\frac{9}{15}$ (equivalente a $\frac{3}{5}$) y $\frac{5}{15}$ (equivalente a $\frac{1}{3}$). Ahora, como tienen el mismo denominador, es fácil compararlas por lo tanto, $\frac{9}{15} > \frac{5}{15}$ entonces $\frac{3}{5} > \frac{1}{3}$.

Usa este truco y completa con $<$, $>$ o $=$ (menor que, mayor que o igual) según corresponda.

$$\frac{2}{5} \square \frac{3}{10}$$

$$\frac{5}{4} \square \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{3} \square \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{8} \square \frac{9}{24}$$

Actividad 4.8.2

El cuadro muestra los resultados de una encuesta realizada a los estudiantes de la UACM. Con los datos disponibles, indica cuál es la música más escuchada. Explica tu razonamiento.

Tipo de música	Fracción del total
Rock	3/10
Pop	3/8
Grupera	1/4
Clásica	3/40

 Discute tus respuestas con el profesor.

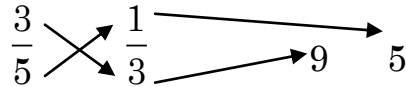
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Escribe dos fracciones que se encuentren entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$. Representa las cuatro fracciones en la recta numérica.

Actividad 4.8.3

Al comparar dos fracciones como $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$, podemos usar la siguiente regla:

- Multiplicamos el numerador de la primera fracción (3) por el denominador de la segunda (3). En este caso el resultado es 9.
- Multiplicamos el denominador de la primera fracción (5) por el numerador de la segunda (1). En este caso el resultado es 5. Este número lo ponemos a la derecha del primer resultado:



- El signo $>$, $<$ o $=$ entre los números (9 y 5) corresponde al signo entre las fracciones. En este caso $9 > 5$, por lo tanto $\frac{3}{5} > \frac{1}{3}$.

$$9 > 5 \Rightarrow \frac{3}{5} > \frac{1}{3}$$

- 1) Usa la regla y resuelve nuevamente el inciso b) de la actividad número 1 de esta sección. Compara tus resultados.

$$\frac{2}{5} \square \frac{3}{10} \quad \frac{5}{4} \square \frac{1}{2} \quad \frac{7}{3} \square \frac{5}{4} \quad \frac{3}{8} \square \frac{9}{24}$$

- 2) ¿Qué sucede con la regla cuando las fracciones son equivalentes?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

4.9 Fracciones irreducibles

De todas las fracciones equivalentes, usualmente conviene usar la que tiene el numerador y el denominador más pequeño posible, la cual recibe el nombre de **fracción irreducible**. Así, la fracción irreducible a $\frac{12}{30}$ es $\frac{2}{5}$.

Actividad 4.9.1

¿Cómo obtienes $\frac{2}{5}$ partiendo de $\frac{12}{30}$? Explica en tu bitácora de trabajo las operaciones que se deben realizar.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Calcula la fracción equivalente e irreducible para cada una de las siguientes fracciones.

$$\text{a) } \frac{16}{24} \quad \text{b) } \frac{18}{36} \quad \text{c) } \frac{21}{28} \quad \text{d) } \frac{60}{84} \quad \text{e) } \frac{90}{108} \quad \text{f) } \frac{96}{144} \quad \text{g) } \frac{75}{225}$$

4.10 Fracciones y números decimales

Actividad 4.10.1

1) ¿Qué diferencia hay entre 0.5 kg de manzana y $\frac{1}{2} \text{ kg}$ de manzana?

2) Encuentra el número decimal que corresponde a cada fracción:

a) $\frac{1}{2}$	a) 0.25
b) $\frac{1}{4}$	b) 2.25
c) $\frac{3}{4}$	c) 0.5
d) $1\frac{1}{2}$	d) 0.75
e) $\frac{9}{4}$	e) 1.5

3) Realiza, con tu calculadora, las siguientes operaciones. Anota tus comentarios en la bitácora.

$$\text{a) } 1 \div 2 = \quad \text{b) } 1 \div 4 = \quad \text{c) } 3 \div 4 = \quad \text{d) } 3 \div 2 = \quad \text{e) } 9 \div 4 =$$

4) Efectúa las siguientes operaciones. Regístralas en tu bitácora.

$$\text{a) } 2\overline{)1} = \quad \text{b) } 4\overline{)1} = \quad \text{c) } 4\overline{)3} = \quad \text{d) } 2\overline{)3} = \quad \text{e) } 4\overline{)9} =$$

5) Escribe qué tienes que hacer para pasar de una fracción a un número decimal. Como ejemplo, obtén el número decimal equivalente a la fracción $\frac{7}{15}$.

Actividad 4.10.2

- 1) Encuentra, usando la calculadora, los números decimales correspondientes a las siguientes fracciones:

$$a) \frac{1237}{10} = \quad b) \frac{992}{10} = \quad c) \frac{23}{10} = \quad d) \frac{78}{10} = \quad e) \frac{2}{10} = \quad f) \frac{1}{10} =$$

- 2) Sin usar la calculadora, encuentra el resultado de:

$$a) \frac{129998}{10} = \quad b) \frac{78564}{10} = \quad c) \frac{123}{10} = \quad d) \frac{67}{10} = \quad e) \frac{5}{10} =$$

- 3) Usando la calculadora verifica los resultados del inciso anterior.
- 4) Sin usar calculadora, encuentra las fracciones equivalentes a los siguientes números decimales.

$$a) 123.4 = \quad b) 13.6 = \quad c) 2.1 = \quad d) 0.6 =$$

- 5) Usando la calculadora verifica los resultados del inciso anterior.
- 6) Si queremos transformar los siguientes números decimales en fracciones que tengan como denominador el número 10 ¿cuáles de los siguientes números podrían transformarse y cuáles no? Justifica tu respuesta.

$$a) 473.4 = \quad b) 27.76 = \quad c) 0.7 = \quad d) 0.652 = \quad e) 1.32 = \quad f) 1.234 =$$

- 7) Explica, en tu bitácora, cuáles son los números decimales que se pueden transformar en una fracción que tenga como denominador el número 10. También explica los pasos necesarios para conseguirlo.

Actividad 4.10.3

- 1) Usando la calculadora encuentra los números decimales correspondientes a las siguientes fracciones:

$$a) \frac{16786}{100} = \quad b) \frac{234}{100} = \quad c) \frac{23}{100} = \quad d) \frac{9}{100} = \quad e) \frac{1}{100} =$$

- 2) Sin usar la calculadora, anota el resultado en número decimal que se obtendría en cada caso.

$$a) \frac{34007}{100} = \quad b) \frac{7898}{100} = \quad c) \frac{123}{100} = \quad d) \frac{17}{100} = \quad e) \frac{8}{100} =$$

- 3) Usa la calculadora y verifica los resultados del inciso anterior.

- 4) Sin usar calculadora, encuentra las fracciones equivalentes a los siguientes números decimales.
- a) $12234.34 =$ b) $13.64 =$ c) $2.11 =$ d) $0.13 =$ e) 0.05
- 5) Usando la calculadora verifica los resultados del inciso anterior.
- 6) Si queremos transformar los siguientes números decimales a una fracción de denominador 100 ¿con cuáles de los siguientes números podríamos hacerlo y con cuáles no?
- a) 47.3423 b) 27.76 c) 6.52 e) 12.2 d) 0.02
- 7) Explica, en tu bitácora de trabajo, cuáles son los números decimales que se pueden transformar a una fracción que tengan como denominador el número 100. También explica los pasos necesarios para conseguirlo.

Actividad 4.10.4

- 1) Escribe las fracciones equivalentes a los siguientes números decimales. En cada inciso las dos primeras fracciones se pueden determinar de acuerdo a lo estudiado en las actividades 2 y 3. Para las dos últimas fracciones se te pide una *predicción*, es decir, un cálculo del resultado, por lo tanto, no uses calculadora.
- a) $75123.4 =$ $7512.34 =$ $751.234 =$ $7.51234 =$
 b) $712.6 =$ $71.26 =$ $7.126 =$ $0.7126 =$
 c) $21.21 =$ $212.1 =$ $2.212 =$ $0.02121 =$
 d) $2.1 =$ $0.21 =$ $0.0021 =$ $0.000021 =$
- 2) Usa la calculadora y verifica los resultados del inciso anterior.
- 3) Explica en tus propias palabras cómo transformar un número decimal a una fracción (puedes ayudarte usando un ejemplo).

Actividad 4.10.5

Encuentra las fracciones equivalentes a los siguientes números decimales. En cada caso simplifica para obtener la fracción irreducible.

a) $0.5 =$ b) $1.2 =$ c) $0.001 =$ d) $0.128 =$ e) $0.002 =$ f) $10.25 =$



Discute tus respuestas con el profesor.

Actividad 4.10.6

Laura y Nancy quieren encontrar la fracción equivalente a 0.40.

Laura: "Yo creo que $0.40 = \frac{40}{100}$ ".

Nancy: "No estoy de acuerdo. El cero después del 4 no influye en nada. Por lo tanto, $0.40 = 0.4 = \frac{4}{10}$ ".

- 1) ¿Con quién estás de acuerdo: con Laura, con Nancy o con ambas?, ¿por qué?
- 2) ¿Cuál de las dos fracciones es mayor $\frac{4}{10}$ ó $\frac{40}{100}$?
- 3) Simplifica las fracciones $\frac{4}{10}$ y $\frac{40}{100}$ para encontrar su fracción irreducible ¿Qué observas?
- 4) Encuentra cuáles de los siguientes números son equivalentes a 1.26.

a) $1.260 =$
b) $1.026 =$
c) $1.26000 =$
d) $01.260 =$
e) $010.260 =$

Actividad 4.10.7

Completa la siguiente tabla:

Fraccion	Fracción irreducible	Número mixto	Esquema	Casita	Número decimal	Recta numérica
$\frac{8}{64}$		No se puede				
				$15\overline{)3}$		
					2.4	
		$6\frac{12}{128}$				
						

Actividad 4.10.8

Completa la siguiente tabla explicando de la manera más clara posible lo que se pide, al hacerlo introduce un ejemplo.

		A:			
		Fracción	Fracción irreducible	Número mixto	Decimal
Para pasar de:	Fracción		Debo dividir el numerador y el denominador por un mismo número, y repetir este proceso hasta que no se pueda más. La fracción encontrada se llama irreducible. Ejemplo: Si tenemos $\frac{6}{12}$ y dividimos por 3 y luego por dos encontramos $\frac{1}{2}$, que es una fracción irreducible.		
	Fracción irreducible				
	Número mixto				
	Decimal				

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 4.10.9

Considera los siguientes números:

$$\frac{6}{9} \quad \frac{22}{22} \quad 2.3 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{8} \quad 0.25 \quad 1\frac{2}{3} \quad 3\overline{)5} \quad 3\overline{)3} \quad 2\frac{2}{3}$$

- 1) ¿Cuáles son menores que uno?
- 2) ¿Cuáles son mayores que uno?
- 3) ¿Cuáles son iguales a uno?
- 4) Ordénalos de menor a mayor.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Ordena los siguientes números de menor a mayor:

$$2\frac{1}{5} \quad 2.4 \quad 1\frac{3}{5} \quad \frac{7}{4} \quad 0.7 \quad 1 \quad \frac{15}{10} \quad \frac{11}{20} \quad 1.75$$

2. Identifica cuáles de los siguientes números representan la misma cantidad y ordénalos de mayor a menor.

$$\begin{array}{cccccccc} 1\frac{1}{2} & 2.0 & 5\overline{)1} & 0.50 & 4 \div 8 & 1.5 & 1 & 3\overline{)6} \\ \frac{12}{10} & \frac{120}{1000} & 1\frac{1}{5} & 5\overline{)6} & \frac{234}{234} & \frac{6}{4} & 1.2 & 30 \div 15 \\ 3 \div 15 & 6\overline{)3} & \frac{4}{8} & \frac{1}{2} & 15\overline{)15} & 24 \div 20 & & \end{array}$$

4.11 Definiciones operacionales en las matemáticas: Definiciones básicas²

Cuando hacemos matemáticas las definiciones operacionales juegan un papel muy importante pues nos permiten tener una idea precisa de lo que estamos hablando. En esta sección revisaremos algunas definiciones operacionales de lo que hemos estado trabajando hasta ahora. De esta manera formalizaremos las ideas y conceptos explorados previamente y veremos la utilidad de las definiciones operacionales en las matemáticas³.

Actividad 4.11.0

Tú hermana menor, Verónica, está terminando el sexto grado de primaria. Ha estado estudiando fracciones todo el año y todavía tiene algunas dudas. Como sabe que estás en la universidad aprovecha para preguntarte:

"Oye hermana(o), la maestra nos dijo que para multiplicar fracciones se multiplica el numerador por el numerador y el denominador por el denominador, por ejemplo, $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$. La verdad es que no entiendo por qué esto se hace así ni que significa el resultado ¿Me podrías explicar?"

Escribe un diálogo con tu hermana en donde le expliques por qué el resultado de $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$ se obtiene "multiplicando el numerador por el numerador y el denominador por el denominador" y que significa que el resultado sea $\frac{12}{35}$.

¿Estás conforme con tu explicación? ¿Resolviste las dudas de tu hermana?



Discute tus respuestas con el profesor.

Es posible que hayas encontrado cierta dificultad para dar una buena explicación a tu hermana. Tal vez el problema radica en que no tenemos definiciones claras (operacionales) de fracción, igualdad o de multiplicación de fracciones, de modo que la explicación se vuelve enredada y oscura.

Veamos si podemos aclarar un poco las cosas empezando desde el principio. Si tenemos suerte tal vez podamos ayudar a nuestra hermana. Nota: En esta sección definiremos que entendemos por fracción e igualdad de fracciones, la

² En esta sección empezamos a introducir nociones de álgebra. Si tienes dificultades, es normal. Ten paciencia y haz tu mejor esfuerzo. No te preocupes si no entiendes todo, en los capítulos que vienen revisaremos la parte algebraica con mucho cuidado.

³ En la mayoría de los libros de matemáticas, a las definiciones operacionales tan solo se las llama definiciones (pues se supone que todas deben de ser operacionales).

definición de las operaciones básicas la dejaremos para el próximo capítulo. Así, para dar una respuesta completa a tu hermana tendrás que esperar un poco. Ten paciencia.

Empecemos volviendo a dar una definición operacional de la recta numérica:

- 1) Toma una línea recta y marca un punto como el 0 (cero).
- 2) Después, fija un segmento hacia la derecha del cero y llámalo el “segmento unitario”. Marca el extremo de la derecha de este segmento, generando así tu primer marcador.
- 3) Desliza tu segmento unitario hacia la derecha hasta que su extremo izquierdo esté sobre el primer marcador. Marca la nueva posición del extremo derecho del segmento unitario, generando así un segundo marcador.
- 4) Repite este proceso de manera que generes una secuencia de marcadores igualmente espaciados a la derecha del cero.
- 5) Repite este proceso hacia la izquierda del cero de manera que generes una secuencia de marcadores igualmente espaciados a la izquierda del mismo (utiliza el mismo segmento unitario).
- 6) Al primer marcador a la derecha del cero llámalo 1, al segundo 2, etc.
- 7) Al primer marcador a la izquierda del cero llámalo -1 (se lee “menos uno”), al segundo -2 (se lee “menos dos”), etc.
- 8) A esta línea, con los marcadores y números la llamamos la “recta numérica”.

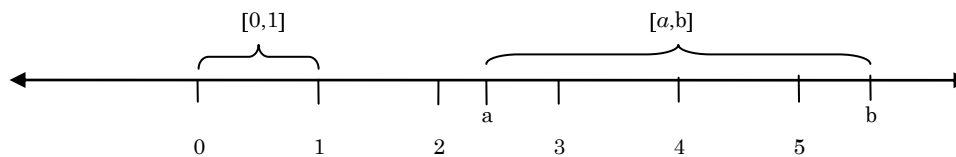
Ahora que hemos dado una definición operacional de la recta numérica podemos dar otras definiciones que serán útiles:

- Definición operacional de **número**: un número es un *punto* sobre la recta numérica⁴.
- Definición operacional de **número positivo y negativo**: un número positivo es un número (un *punto* sobre la recta numérica) a la derecha del cero y un número negativo es un número a la izquierda del cero.

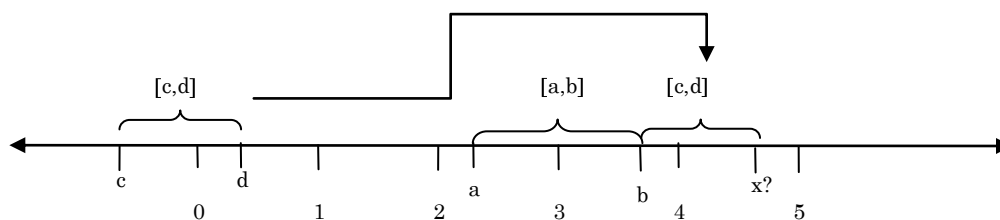
⁴ En los libros de matemáticas a la recta numérica se le llama la “recta real”, y a los números (definidos como puntos sobre la recta) se les llama “números reales”.

- Definición operacional de **número natural**: un número natural es uno de los marcadores a la derecha del 0, incluyendo al cero, en la recta numérica que acabamos de definir. Así, el 0, el 2 y el 134,453 son ejemplos de números naturales.
- Definición operacional de **número entero**: un número entero es uno de los marcadores de la recta numérica que acabamos de definir. Por ejemplo, el número entero 5 es el quinto marcador a la derecha del cero, mientras que el menos 10 (-10) es el décimo marcador a la izquierda del cero.

Si a y b son dos puntos sobre la recta numérica (es decir, números), con “ a ” a la izquierda de “ b ”, denotamos al segmento de recta de “ a ” a “ b ” por $[a,b]$. A los puntos a y b se los llama los extremos del segmento $[a,b]$. Al segmento $[0,1]$ se le llama el “segmento unitario” y al punto (o marcador) 1, la unidad. La longitud del segmento $[0,1]$ es, por definición, 1 (o una unidad).



Si tenemos dos segmentos $[a,b]$ y $[c,d]$, decimos que la *concatenación* de estos segmentos se obtiene deslizando el segmento $[c,d]$ hasta que el extremo izquierdo de éste coincida con el extremo derecho del segmento $[a,b]$

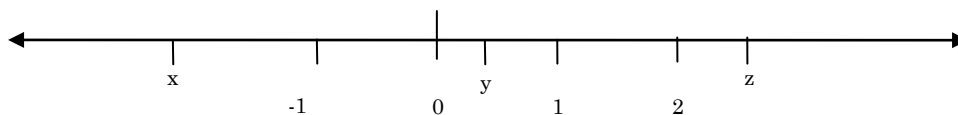


¿Cuál es la longitud del segmento $[a,b]$? En el dibujo anterior ¿Cuál es el valor de x en términos de a , b , c y d ?

Es importante que notes que el segmento $[a,b]$ es un *conjunto* de puntos, a saber, *todos* los puntos (números) sobre la recta entre a y b (incluyendo a los puntos a y b).

Actividad 4.11.1

Acabamos de definir un número como un punto sobre la recta numérica. Considera la siguiente recta numérica y contesta las siguientes preguntas:



- 1) Sobre la recta, señala los segmentos $[0,2]$, $[-1,1]$, $[x,2]$ y $[y,z]$.
- 2) Dibuja y di cuánto mide la concatenación de los siguientes segmentos. También di en qué número empiezan y en qué número terminan :

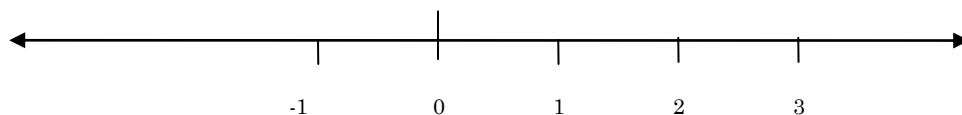
- (a) $[0,2]$ y $[0,1]$
- (b) $[0,1]$ y $[0,2]$
- (c) $[0,2]$ y $[-1,1]$
- (d) $[-1,1]$ y $[0,2]$
- (e) $[0,2]$ y $[0,y]$
- (f) $[0,y]$ y $[0,2]$
- (g) $[0,z]$ y $[x,y]$

Con base en tus resultados ¿Son el mismo segmento la concatenación de $[a,b]$ y $[c,d]$ y la concatenación de $[c,d]$ y $[a,b]$? ¿En qué son iguales? ¿En qué son diferentes?

- 1) ¿Qué números son “x”, “y” y “z” (cuál es el valor numérico)? ¿Cómo hiciste para saber? ¿Puedes estar seguro de tus respuestas? Si no puedes estar seguro ¿Qué tendrías que hacer para poder estarlo? Explica tu razonamiento.

Actividad 4.11.2

Ubica los siguientes números en la recta numérica: $\frac{2}{3}$, -1.5 , $\frac{17}{23}$ y 3.25 .



¿Puedes estar seguro de tus respuestas? Si no puedes estar seguro ¿Qué tendrías que hacer para poder estarlo? Explica tu razonamiento.

Actividad 4.11.3⁵

Imagina que tu prima María te llama desde Los Mochis, pues está atorada con la actividad anterior. Escribe un diálogo telefónico con tu prima en el que le expliques los pasos que debe de seguir para ubicar los números $\frac{2}{3}$ y $\frac{17}{23}$. Puedes suponer que está viendo la misma recta numérica que tú.

Actividad 4.11.4

Escribe una definición operacional de la fracción $\frac{m}{3}$, donde m es un número entero positivo (Ayuda: Si esto te es difícil, empieza por darle valores a m y ve si lo puedes hacer. Así, cuando m es igual a 7, tienes que dar la definición operacional de $\frac{7}{3}$, etc. ¿Qué hay que hacer con el segmento unitario $[0,1]$? ¿y luego?)

Escribe una definición operacional de la fracción $\frac{m}{n}$, donde m y n son números naturales y $n \neq 0$.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 4.11.5

Considera dos números “ a ” y “ b ” (es decir, dos puntos sobre la recta numérica).

- 1) ¿Qué significa la expresión “ $a < b$ ” (a menor que b)?
- 2) ¿Qué significa la expresión “ $a > b$ ” (a mayor que b)?

⁵ A partir de esta actividad trabajaremos solamente con números positivos.

- 3) ¿Qué significa la expresión " $a = b$ " (a igual a b)?
- 4) Da las definiciones operacionales para $a < b$, $a > b$ y $a = b$ (es decir, explica que hay que hacer para saber si " $a < b$ ", " $a > b$ " o " $a = b$ ").

Actividad 4.11.6

Tres estudiantes discuten sus definiciones de la actividad anterior:

Estudiante 1: "Yo digo que $a < b$ cuando a es un número más chico que b ."

Estudiante 2: "Sí, estoy de acuerdo. Además, $a = b$ cuando a y b valen lo mismo."

Estudiante 3: "No estoy seguro. ¿Qué significa que " a y b valen lo mismo"? Yo puse que " $a < b$ " cuando el número a está a la izquierda del número b ."

- 1) ¿Con cuáles estudiantes estás de acuerdo y con cuáles no? Explica tu razonamiento.
- 2) Si es necesario, modifica las definiciones operacionales que hiciste en la actividad anterior.

Actividad 4.11.7

Haciendo uso de las definiciones operacionales de fracción y de igualdad de dos números, muestra que $\frac{5 \times 4}{5 \times 3} = \frac{4}{3}$. Para esto contesta las siguientes preguntas:

- 1) Si usamos la definición operacional de igualdad de números ¿qué significa que $\frac{5 \times 4}{5 \times 3}$ sea igual a $\frac{4}{3}$?
- 2) Utiliza la definición operacional de fracción para ubicar los números $\frac{5 \times 4}{5 \times 3}$ y $\frac{4}{3}$ en la recta numérica. ¿Obtuviste el mismo punto sobre la recta? ¿qué significa esto? Explica.

Actividad 4.11.7.1

Después de haber contestado la actividad anterior dos estudiantes tienen la siguiente conversación:

Estudiante 1: "Después de haber hecho el ejemplo anterior me di cuenta algo: cuando tengo una fracción, *siempre* puedo obtener una fracción equivalente a ésta si multiplico el numerador y el denominador por el mismo número. Para estar seguro probé con cinco ejemplos más y en todos obtuve fracciones equivalentes. Ahora estoy 100% seguro"

Estudiante 2: "¿Cómo puedes estar 100% seguro? Tal vez para algún caso, que aún no has probado, lo que dices no es cierto. ¿Ya probaste todos los casos posibles?"

- 1) ¿Con quién estás de acuerdo? Explica tu razonamiento.
- 2) Si estás de acuerdo con el estudiante 2, ¿qué tendrías que hacer para poder estar 100% seguro?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 4.11.8⁶

Haciendo uso de las definiciones operacionales de fracción y de igualdad de dos números, muestra que para todos los números naturales k , m y n (con $n \neq 0$ y $k \neq 0$) es cierto que:

$$\frac{m}{n} = \frac{k \times m}{k \times n}.$$

Para hacer esto, revisa lo que hiciste en la actividad anterior. ¿Cuáles eran los valores de k , m y n en la actividad anterior? Vuelve a contestar los incisos A y B pero ahora para el caso general.

- 1) ¿Para qué fracciones se cumple lo que acabas de mostrar?
- 2) ¿Se podría volver a aplicar el argumento del estudiante 2 a lo que acabas de hacer? Explica.

*Este es, posiblemente, el resultado más importante acerca de fracciones ya que nos permite identificar y construir fracciones equivalentes. Una consecuencia muy útil de este resultado es el hecho de que **cualesquiera dos fracciones se pueden representar como dos fracciones con el mismo denominador**. Esto fue lo que utilizamos en la sección 4.8 sin justificar.*

⁶ Esta actividad es un poco más difícil. ¡Ten paciencia!

Actividad 4.11.9

- 1) Si las fracciones son $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{5}$ ¿Cuáles serían las fracciones equivalentes con el mismo denominador a las que nos referimos en el párrafo anterior? ¿Son únicas?
- 2) Si las fracciones son $\frac{k}{l}$ y $\frac{m}{n}$ ¿Cuáles serían las fracciones equivalentes con el mismo denominador a las que nos referimos en el párrafo anterior? ¿Son únicas?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. A las fracciones cuyos denominadores son potencias positivas de 10 se les llama *fracciones decimales*. Por ejemplo:

$$\frac{1489}{100}, \quad \frac{24}{100000}, \quad \frac{58900}{10000}$$

¿Es la anterior una definición operacional de fracción decimal?

Para este tipo de fracciones, es cómodo abreviar, para no tener que poner tantos ceros, y escribir:

$$14.89, \quad 0.00024, \quad 5.8900,$$

respectivamente. La lógica de esta notación es que el número de dígitos a la derecha del llamado “punto decimal” lleva la cuenta del número de ceros del denominador. Esto es, 2 en 14.89, 5 en 0.00024, y 4 en 5.8900. A estos números se lo llama decimales finitos.

- 1) Da una definición operacional de “decimal finito”.
 - 2) Utiliza las definiciones operacionales y el resultado de la Actividad 4.11.8 para mostrar que $5.8900 = 5.89$ y que $0.128 < 0.3$.
2. En tu definición operacional de fracción fue necesario partir a la unidad en partes iguales. ¿Qué hay que hacer para partir un segmento en siete partes iguales? Explica antes de continuar.

Observa que hasta ahora no hemos definido lo que significa la división de números, de manera que si tu respuesta fuera algo como: “Mido el segmento unitario con una regla y a ese número lo divido entre siete para saber cada cuanto tengo que marcar”, estarías usando algo que no hemos definido, es decir, la división de números (siendo rigurosos, no hemos definido $1 \div 7$, así que no sabemos, ni siquiera, que significa, ni como se obtiene).

Utilizando una regla, una escuadra y un compás, describe como harías para partir tu segmento en siete partes iguales. ¿Cómo harías para partirlo en n partes iguales? (para hacer esto no es necesario hacer ninguna operación)

3. Una parte importante de tu definición operacional de fracción fue el uso de la unidad (o del segmento unitario). En las aplicaciones, esta unidad puede representar diferentes cosas, como cierta área, masa, número de personas, etc. Así, cuando elegimos una unidad fija (que está usualmente dada por la situación), la definición operacional de una fracción sería algo como:

“Sean m y n números naturales y $n \neq 0$. Entonces, $\frac{1}{n}$ es una de las partes, cuando la unidad elegida ha sido partida en n partes iguales, y $\frac{m}{n}$ son m de estas partes”.

- 1) A tu prima María, que va en cuarto de primaria, le dijeron en la escuela que “para tener $\frac{1}{7}$ de pastel hay que partir el pastel en siete partes iguales y tomar una”. Al llegar de la escuela te busca y te pregunta: “Oye primo, cuándo me dicen que hay que “partir el pastel en siete partes iguales” ¿en qué son “iguales”? ¿tienen que ser igual de sabrosas? ¿tienen que ser del “mismo tamaño”? ¿qué significa que sean del “mismo tamaño”? Por favor explícame”.

Escribe un diálogo en donde le expliques a tu prima a que se refiere el término “partes iguales” en la definición que le dieron en la escuela.

- 2) Es importante que notes que en la definición operacional anterior no se aclara que quiere decir “partes iguales” pues ahora esto depende de cuál sea la unidad. Con base en lo anterior completa la siguiente tabla:

Unidad	Significado de “partes iguales”	Fracción	Valor de la fracción en dependencia de la unidad dada.
3 cm	Partes de la misma longitud		1 cm
		$\frac{2}{3}$	352 metros
1 m ²	Partes con la misma área		50 cm ²
		$\frac{3}{4}$	2.4 Kg
4 Kg	Partes con la misma masa		10 000 g
60 Km ²			25 Km ²
300 gramos	Partes con la misma masa	$\frac{11}{3}$	

	Partes con el mismo número de personas	$\frac{2}{6}$	30 personas
8 m ³			30 m ³
1.5 m ³			300 cm ³

4. Una sustancia química se descompone de manera tal que se reduce a la mitad cada 3 minutos. Si al inicio tenemos 6 gramos de sustancia ¿Cuánto quedará despues de a) 3 minutos, b) 27 minutos y, c) 36 minutos?

5. Di cuáles de las siguientes aseveraciones son verdaderas y cuáles falsas. En cada caso explica tu respuesta. Si la aseveración es falsa, con dar un contra ejemplo es suficiente.

- 1) El cero es un número positivo y negativo.
- 2) Todo número entero es una fracción.
- 3) Toda fracción es un número entero.
- 4) Todo número es una fracción.
- 5) Hay más números enteros que números naturales.
- 6) Hay más fracciones que números enteros.
- 7) Toda fracción se puede escribir como un decimal finito.

6. Muestra que si a , b , c , d son números naturales con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces, la igualdad de las fracciones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

es equivalente a la igualdad de

$$ad = bc.$$

¡Este es el algoritmo de multiplicación cruzada que aprendiste en la sección 4.8 para comparar fraccioncon disitinto denominador! Ayuda: Construye fracciones equivalentes con el mismo denominador. Si dos fracciones con el mismo denominador son iguales ¿cómo deben de ser sus numeradores?

7. Argumenta, sin hacer cálculos, cuál de las siguientes fracciones es mayor: $\frac{5}{7}$ ó $\frac{6}{8}$. ¿Cuál está más cerca de 1? Explica.

PROBLEMAS DE RETO

1. Explica cómo ubicarías los siguientes números en la recta numérica (¿qué tendrías que hacer?).

a) 7 b) 2.018 c) $0.\widehat{6}$ d) $0.\widehat{36}$ e) $\sqrt{2}$ f) π (pi)

2. Si tienes una cuerda que mide $\frac{2}{3}$ de metro ¿Cómo cortarías un pedazo que mida $\frac{1}{2}$ de metro si no tienes una cinta métrica? Explica.

3. Argumenta, sin hacer cálculos, cuál de las siguientes fracciones es mayor:

a) $\frac{10001}{10002}$ ó $\frac{100001}{100002}$ b) $\frac{12345}{54321}$ ó $\frac{12346}{54322}$

En cada caso explica tu razonamiento. Si no es posible hacer la comparación sin hacer cálculos, explica por qué no.

4. Una sustancia química reacciona de manera tal que un tercio de la sustancia sobrante se descompone cada 15 minutos. Si al inicio tenemos 15g de sustancia.

- 1) ¿Cuánta sustancia quedará después de a) 30 min, b) 45 min y c) 165 min? Explica.
- 2) ¿Cuánto tiempo se requerirá para que toda la sustancia se descomponga? Explica.
- 3) Escribe una expresión algebraica que describa la cantidad de sustancia, m , que queda después de t minutos. ¿Es tu expresión algebraica consistente con los resultados que encontraste en los incisos anteriores? Explica.

5. Un contaminante químico es vaciado en un lago con 50,000 peces. Cada mes, un tercio de los peces que aún están vivos muere debido a este contaminante. En cada caso, explica.

- 1) ¿Cuántos peces estarán vivos después de a) 1 mes, b) 2 meses, c) 4 meses y, d) 6 meses?
- 2) ¿Cuál será el primer mes cuando más de la mitad de los peces estarán muertos?
- 3) ¿En qué mes habrá muerto el 80% de la población de peces?

6. Cada diez años la población de una ciudad es cinco cuartos de lo que era diez años antes.

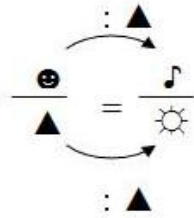
- 1) ¿Cuántos años tomará para que la población a) se duplique y, b) se triplique?
- 2) ¿Si en el 2010 la población es de 20 millones de habitantes ¿Cuál será la población en el a) 2015, b) 2023 y c) 2061? ¿Cuál era la población en el 2000? Explica.
- 3) Escribe una expresión algebraica para la población, P , en términos del año, a , y la población inicial P_0 , en un año dado. ¿Es tu expresión algebraica consistente con los resultados que encontraste en los incisos anteriores? Explica tu respuesta.

4.12 Autoevaluación

- 1 ¿Cuántas horas hay en la mitad de un tercio de un cuarto del día? Representa la situación en un esquema.
- 2 En una caja hay 30 lápices, de los cuales $\frac{2}{5}$ son rojos.
 - 1) ¿cuántos lápices son rojos?
 - 2) ¿cuántos lápices no son rojos?
- 3 Identifica en qué actividad (o actividades) aprendiste o entendiste qué indica el numerador y el denominador de una fracción.
- 4 Identifica en qué actividad (o actividades) aprendiste o entendiste cómo comparar y ordenar fracciones usando un esquema.
- 5 Andrea comió $\frac{1}{4}$ de pastel y Fany $\frac{2}{5}$ del mismo.
 - 1) Realiza un esquema que represente la situación (usa una división conveniente del entero en cada caso).
 - 2) Qué fracción del pastel queda?
 - 3) ¿Qué interpretación le darías a los siguientes números?

$$a) \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \qquad b) 1 - \frac{1}{4} \qquad c) 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} \right)$$
 - 4) Usando un esquema encuentra el resultado de las operaciones del inciso anterior.
- 6 Explica qué es una fracción propia y una impropia y da al menos dos ejemplos de cada una de ellas.
- 7 Escribe un diálogo en el cual le explicas a una persona qué significa que dos fracciones sean equivalentes.
- 8 Encuentra tres fracciones equivalentes a $\frac{12}{8}$ e indica el método que usaste para encontrarlas.

- 9 Los dígitos de 1 al 9 de los numeradores y denominadores de las fracciones del siguiente dibujo fueron sustituidos con símbolos. Los símbolos que son iguales sustituyen números iguales y los distintos sustituyen números distintos ¿Cuál es la equivalencia de las fracciones, tomando en cuenta que el símbolo ▲ es igual al número 4?



- 10 Identifica en qué actividad (o actividades) aprendiste o entendiste cómo se hace para saber cuando varios números, escritos de manera diferente, representan la misma cantidad.

- 11 Considerando las siguientes fracciones: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{9}$.

- 1) ¿Cuáles son menores que 1?
- 2) ¿Cuáles son mayores que 1?
- 3) ¿Cuáles son menores o iguales a $\frac{1}{2}$?
- 4) ¿Cuáles son mayores que $\frac{1}{2}$ y menores que 1?
- 5) ¿Cuáles son mayores o iguales que 2?

- 12 Ubica las fracciones del ejercicio anterior en la recta numérica.

- 13 Ordena los siguientes números de menor a mayor:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1\frac{1}{2} & 2.00 & 3\overline{)1} & 0.050 & 3 \div 9 & 0.75 & 1 & 3\overline{)3} \\
 \frac{8}{2} & \frac{3000}{4000} & 1\frac{1}{5} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1.3 & 0.2 & 2.4 \\
 0.75 & 25\overline{)10} & \frac{2}{5} & \frac{4}{12} & 3.4 & & & &
 \end{array}$$

Objetivos de aprendizaje del capítulo 4

Después de haber terminado este capítulo debes de ser capaz de hacer las siguientes cosas:

- 1 Describir el conjunto de actividades, problemas o ejercicios que te llevaron a entender qué dice el numerador y el denominador acerca de una fracción. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques cómo se fueron resolviendo con las actividades.
- 2 Describir el conjunto de actividades, problemas o ejercicios que te llevaron a entender cómo se hace para comparar y ordenar fracciones usando un esquema. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques cómo se fueron resolviendo con las actividades.
- 3 Resolver la suma y resta de fracciones utilizando esquemas.
- 4 Relacionar el concepto de suma y resta con el de agregar y quitar.
- 5 Explicar, con tus propias palabras, qué es una interpretación de un número calculado y qué relación tiene esto con formular problemas o preguntas.
- 6 Identificar y construir fracciones equivalentes.
- 7 Representar una fracción con un esquema, en la recta numérica, en forma decimal, en forma irreducible, como fracción mixta, etc.
- 8 Comparar dos fracciones usando diferentes métodos: representar en un esquema, representar en la recta numérica, pasar a fracciones equivalentes, pasar a decimales y usar la fórmula.
- 9 Describir el conjunto de actividades, problemas o ejercicios que te llevaron a entender cómo se hace para saber cuando varios números, escritos de manera diferente, representan la misma cantidad. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques cómo se fueron resolviendo con las actividades.

- 10** Ordenar de mayor a menor (y al revés) un conjunto de números escritos de diferentes maneras: fracción, decimal, números mixtos, en forma de casita, etc.
- 11** Formular y resolver problemas como los del final del capítulo (Autoevaluación).

CAPÍTULO 5

*Suma, resta, producto y
cociente de fracciones*

Cómo conseguir un contrato como consultor usando un poco de matemáticas

*Adrián Paenza*¹

Uno puede hacerse pasar por adivino o por una persona capaz de predecir el futuro o de aventurar lo que va a pasar en la Bolsa de Valores: basta aprovechar la rapidez con la que crecen las potencias de un número.

El siguiente es un ejemplo muy interesante. Supongamos que tenemos una base de datos de 180 000 personas. De todas formas para lo que quiero invitarlos a pensar podríamos empezar con un número más chico e igualmente el efecto sería el mismo.

Supongamos que elegimos acción cuyo precio cotice en la Bolsa; por ejemplo: el precio del oro. Supongamos también que ustedes se sientan frente a su computadora un domingo por la tarde. Buscan la base de datos que tienen y seleccionan las direcciones electrónicas de todas las personas que allí figuran. Entonces, la mitad de ellas (64 000) les envían un mail diciéndoles que el precio del oro va a subir al día siguiente (lunes). Y a la otra mitad les envían una mail diciéndoles lo contrario que el precio del oro va a bajar.

Cuando llega el lunes, al finalizar el día el precio del oro o bien subió o bien bajó. Si subió, hay 64 000 personas que habrán recibido un mail de ustedes diciéndoles que subiría.

Claro, qué importancia tendría. Haber acertado un día lo que pasaría con el oro tiene poca relevancia. Pero sigamos con la idea: el lunes a la noche, de las 64000 personas que habían recibido su primer mail diciéndoles que el precio del oro subiría, ustedes seleccionan la mitad (32 000) y les dicen que el martes volverá a subir. Y a la otra mitad, los otros 32000 les envían un mail diciéndoles que va a bajar.

Llegando el martes por la noche, ustedes están seguros de que hay 32000 para los cuales ustedes no sólo acertaron lo del martes sino también lo del lunes. Ahora repitan el proceso. Al dividir por la mitad, a 16000 les dicen que va a subir y al resto, los otros 16000, que va a bajar. Resultado, el miércoles ustedes tienen 16000 personas a las que les avisaron el lunes, el mar-

¹ Paenza, Adrián. *Matemáticas... ¿estás ahí?, sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina, 2005, págs. 23-25.

tes y el miércoles lo que pasaría con el precio del oro. Y acertaron las tres veces (para este grupo).

Repítalo una vez más. Al finalizar el jueves, ustedes tienen 8000 para los que acertaron cuatro veces. Y el viernes por la noche, tienen 4000. Piensen bien: el viernes por la noche, ustedes tienen 4000 personas que los vieron acertar todos los días con lo que pasaría con el precio del oro, sin faltar nunca. Claro que el proceso podrían seguirlo a la semana siguiente, y podría tener dos mil al siguiente lunes, mil al martes y, si queremos estirarlo aún más, el miércoles de la segunda semana, tendrán 500 personas a las que les fueron diciendo, día por día, durante diez días, lo que pasaría con el precio del oro.

Si alguno de ustedes pidiera a estas personas que lo contrataran como consultor pagándole, digamos mil dólares por año ¿no creen que contratarían sus servicios? Recuerden que ustedes acertaron siempre por diez días consecutivos.

Con esta idea, empezando con una base de datos o bien más grande o más chica, o parando antes en el envío de correos electrónicos, ustedes se pueden fabricar su propio grupo de personas que crean en sus predicciones. Y ganar dinero en el intento.

Actividad 5.0

Piensa en algún ejemplo para ganar dinero usando la idea propuesta.

- 1) ¿Consideras que esta es una forma honesta de ganar dinero? ¿Por qué?

5.1 Suma y resta

Actividad 5.1.1

Héctor y Rodrigo discuten sobre cómo realizar la siguiente resta:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

Héctor: “Hay que restar los numeradores y multiplicar los denominadores, de la siguiente manera”:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

Rodrigo: “Como $\frac{4}{6}$ es equivalente a $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$, entonces podemos hacer:”

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6}$$

Por lo tanto nos queda una resta de fracciones con igual denominador:

$$\frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Aunque los dos llegan al mismo resultado, ¿quién tiene razón? ¿por qué?

Actividad 5.1.2

Usa los dos métodos de la actividad anterior (el de Héctor y el de Rodrigo) para realizar la siguiente suma:

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{3}$$

¿Los dos métodos llegan al mismo resultado? Explica quién tiene razón e indica si esta respuesta coincide con la respuesta de la Actividad 5.1.1.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 5.1.3

Realiza un recorrido por el tablero a partir de la casilla inicio hasta la casilla final. Desde una casilla sólo puedes pasar a la inmediata siguiente en sentido horizontal o vertical (nunca en diagonal). Tampoco puedes pasar dos veces por la misma casilla.

La suma exacta de los números (incluyendo el primero y el último) asignados a las casillas que recorriste para llegar al final debe ser menor a 1,. Da da esta condición ¿cuál es el camino correcto?

Inicio
↓

$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0.01
0.3	0.2	0.1	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	0.07

↓
Final

Actividad 5.1.4

Nicolás gastó $\frac{2}{5}$ de la gasolina de su motocicleta en ir a la escuela y $\frac{1}{5}$ en ir al cine. ¿Qué significado le darías a los siguientes números?

$$a) \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \quad b) 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \right) \quad c) 1 - \frac{2}{5}$$

Actividad 5.1.5

Carlos repartió su torta entre sus amigos. Le dio $\frac{1}{3}$ a Juan, $\frac{1}{2}$ a Cristina y $\frac{3}{8}$ a Susana. Pero Carolina piensa que esta repartición no es posible ¿Por qué dirá esto? ¿Tendrá razón? Explica tu razonamiento.

Actividad 5.1.6

La siguiente tabla muestra la fracción de una pared construida por dos albañiles. Tomando en cuenta que las paredes son del mismo tamaño:

- 1) ¿Qué fracción lleva construida cada albañil?
- 2) ¿A quién le falta menos?
- 3) ¿Qué fracción de pared le falta a cada uno? Explica tu razonamiento.

	Lunes	martes	miércoles
Pedro	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$
Luis	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Con la marea alta, el nivel de agua en una estaca de medición es de $20\frac{3}{4}$ metros. Con marea baja el nivel de agua desciende hasta $8\frac{7}{8}$ metros ¿Cuánto descendió el nivel del agua?

2. Un carro usó ayer $\frac{1}{3}$ de la gasolina de su tanque y hoy $\frac{1}{2}$ del mismo.

- 1) ¿Qué fracción sobra?
- 2) Si el carro tenía 120 litros ¿Cuántos litros quedan?

3. Ubica los círculos con las fracciones de tal forma que al realizar las operaciones indicadas entre ellos obtengas el resultado señalado.

2/15	+ =	6/5
1/3	- =	1/5
2/5	=	
16/15	+ = 1	2/3

5.2 Producto y cociente de fracciones

Recuerda que: el producto o multiplicación de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las dos fracciones iniciales y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las mismas. La justificación de esta aseveración la veremos en la sección 5.3.

Actividad 5.2.1

Sigue la instrucción anterior y calcula:

$$a) \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \quad b) \frac{7}{4} \times \frac{12}{21} = \quad c) \frac{2}{3} \times 2 =$$

Actividad 5.2.2

Los dígitos del 1 al 9 de los numeradores y denominadores de las fracciones del siguiente dibujo fueron sustituidos con símbolos. Los símbolos iguales sustituyen números iguales y los distintos sustituyen números distintos.

¿Cuál es la multiplicación de fracciones? Ayuda: El corazón sustituye al número 3 y el trébol al número 2.

$$\frac{\spadesuit}{\clubsuit} \times \frac{\heartsuit}{\diamondsuit} = \frac{\heartsuit}{\smiley}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

I. Coloca los cuadrados con las fracciones de tal forma que al multiplicar los números de cada fila y de cada columna el resultado sea igual a 1.

$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

		2
		$\frac{3}{2}$
6		

2. Cuando multiplicamos dos números naturales, el resultado siempre será mayor que el valor de cada uno de ellos. Por ejemplo, si multiplicamos 3 y 7 el resultado es 21; que es mayor tanto a 3 como a 7.

¿Ocurre lo mismo cuando multiplicamos dos fracciones?

3. Escribe un diálogo en el cual le expliques a tu hermano por qué cuando multiplicas dos fracciones, el resultado no es necesariamente mayor al valor de cada una de ellas. (Puedes usar un ejemplo).

Actividad 5.2.3

Un terreno tiene un área de 240 m^2 .

1) Indica cuántos metros cuadrados del terreno representan:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$

2) Como $\frac{1}{6}$ de 240 m^2 es igual a 40 m^2 , determina cuántos metros cuadrados son:

- a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{5}{6}$

Actividad 5.2.4

Sergio y Marga discuten acerca de cómo calcular $\frac{4}{6}$ de 240 m^2 .

Sergio: “Como $\frac{1}{6}$ de 240 m^2 es igual a 40 m^2 , entonces $\frac{4}{6}$ es igual a:

$$\frac{4}{6} \text{ de } 240 = 40 + 40 + 40 + 40”$$

Marga: “No estoy de acuerdo. Como $\frac{1}{6}$ de 240 m^2 es igual a 40 m^2 , entonces

$\frac{4}{6}$ de 240 m^2 son 4 veces 40, es decir:

$$\frac{4}{6} \text{ de } 240 = 4 \times 40”$$

¿Con quién estás de acuerdo? Explica tu respuesta.

Actividad 5.2.5

De la superficie del mismo terreno encuentra:

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{15}{24}$ d) $\frac{5}{8}$

Actividad 5.2.6

Encuentra:

a) $\frac{1}{4}$ de 12.3 m^2 b) $\frac{7}{13}$ de 7.6 litros c) $\frac{15}{24}$ de 3.1 kg d) $\frac{5}{8}$ de 153.75 cm

Actividad 5.2.7

Para encontrar $\frac{6}{15}$ de una cubeta de 21 litros de agua se pueden seguir los siguientes pasos:

Paso 1 $21 \div 15 = 1.4$

Paso 2 $1.4 \times 6 = 8.4$

Explica qué se está haciendo en cada uno de los pasos.

Actividad 5.2.8

- 1) Se quiere encontrar $\frac{7}{20}$ de 15 kg de manzanas ¿cuáles de los siguientes números representan el resultado de esta operación?

a) $(15 \div 20) \times 7$ b) $(15 \div 78) \times 20$ c) $7 \times (15 \div 20)$

d) $\frac{7}{20} \times 15$ e) $\frac{7 \times 15}{20}$ f) $\frac{7 \times 20}{15}$

- 2) ¿Cuál es el resultado de $\frac{7}{20}$ de 15 kg de manzanas?

a) 5.25 b) $7\frac{3}{4}$ c) $5\frac{1}{4}$ d) $\frac{31}{4}$ e) 9.3

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 5.2.9

Encuentra:

- a) $\frac{1}{10}$ de 200 km² b) $\frac{3}{5}$ de \$ 3200 c) $\frac{7}{13}$ de 1 kg d) $\frac{5}{6}$ de 0.45 s

Expresa tu resultado de tres maneras distintas: Número decimal, fracción y número mixto (si se puede). No olvides indicar las unidades adecuadas.

Actividad 5.2.10

¿Qué es mayor?

- 1) $\frac{3}{5}$ de 1 litro de leche o $\frac{3}{5}$ litros de leche.
- 2) $\frac{3}{5}$ de 5 litros de leche o $\frac{3}{5}$ litros de leche.
- 3) $\frac{2}{5}$ litros de leche o 0.4 litros de leche.

Explica tu respuesta en cada caso.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resuelve los siguientes problemas, al hacerlo usa el *Formato de resolución de problemas* ubicado en el Apéndice de este libro.

1. Una familia tiene en su casa 8 kg de higos. En el almuerzo se comen las dos quintas partes y en la cena el resto ¿Cuánto han comido en cada comida?
2. José sale de su casa con \$50 y gasta $\frac{4}{5}$ en el cine y $\frac{1}{10}$ en dulces, ¿qué fracción del total ha gastado? ¿Cuánto dinero le queda?
3. La mitad de alumnos de una escuela en Michoacán son originarios del estado, un tercio provienen de otras entidades y el resto nacieron en otros países. Si los alumnos extranjeros son 83, ¿cuántos alumnos nacieron en Michoacán?
4. Debido al mal tiempo un ciclista viajó el día de ayer solamente $\frac{1}{6}$ de su recorrido. Si él decidió viajar $\frac{3}{8}$ hoy y $\frac{2}{7}$ mañana:
 - 1) ¿Qué fracción del viaje le falta por recorrer después de mañana?
 - 2) Si el trayecto es de 157 km, ¿qué distancia le falta por recorrer?

5. Un ascensor acepta una carga máxima 150 kilogramos. Cuatro amigos quieren tomar el ascensor; sin embargo, respecto de la capacidad máxima, sus pesos son los siguientes: un tercio, dos quintos, un medio y dos tercios, ¿cuál es el menor número de veces que el ascensor debe subir para llevar a los cuatro amigos al mismo piso?
6. Compramos 10 kg de duraznos para hacer mermelada. Al deshuesarlos y pelarlos se pierde un quinto de su peso. Lo que queda se pone a cocer con una cantidad igual de azúcar. Durante la cocción la mezcla pierde un cuarto de su peso. ¿Cuántos kilogramos de mermelada se obtienen?
7. Marco tiene en un taller de motos. Si cada moto de su taller tiene un tanque con una capacidad de $5\frac{1}{3}$ litros de gasolina, ¿cuántos litros de gasolina debe comprar para llenar el tanque de 7 motos?
8. Raúl quiere llenar 5.5 botes con azúcar. A cada bote le caben $\frac{7}{8}$ kg de azúcar. ¿Cuántos kilogramos de azúcar necesita para llenar los botes?
9. Escribe el enunciado de un problema cuya solución se obtenga a través de la siguiente operación:

$$\frac{15}{3} \times 4$$

Actividad 5.2.11

Una forma de calcular la división entre dos fracciones es transformando dicha división en una multiplicación. Observa los siguientes ejemplos:

$$a) \frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \quad b) \frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21} \quad c) \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$$

- 1) Explica cómo se realiza la división entre dos fracciones.
- 2) Resuelve los siguientes ejercicios.

$$a) \frac{2}{3} \div \frac{1}{22} = \quad b) \frac{5}{3} \div 12 = \quad c) \frac{5}{3} \div 1\frac{4}{7} =$$

$$d) \frac{\frac{12}{3}}{\frac{3}{4}} = \quad e) \frac{0.25}{\frac{1}{3}} = \quad f) \frac{\frac{3}{3}}{\frac{3}{4}} =$$

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resuelve los siguientes ejercicios. En los ejercicios 2 y 4 usa el *Formato de resolución de problemas* ubicado en el Apéndice de este libro.

1. Tengo un barril con $\frac{35}{2}$ litros de cerveza y quiero repartirlos en cinco partes iguales.

1) ¿Qué interpretación le darías a los siguientes números?

$$a) \frac{\frac{35}{2}}{5} \quad b) \frac{35}{2} + 5 \quad c) \frac{35}{2} \times 5$$

2) ¿Cuántos litros de cerveza tendrá cada parte?

2. Un pedazo de tela de $\frac{124}{13}$ metros necesita cortarse en 12 pedazos iguales ¿Cuánto medirá cada pedazo?

3. Un rollo de cable que mide $\frac{25}{4}$ metros necesita cortarse en pedazos de $\frac{5}{8}$ metros.

1) ¿Qué interpretación le darías a los siguientes números?

$$a) \frac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{8}} \quad b) \frac{25}{4} + \frac{5}{8} \quad c) \frac{25}{4} - \frac{5}{8} \quad d) \frac{25}{4} \times \frac{5}{8}$$

2) ¿En cuántos pedazos se cortará el rollo de cable?

4. De una cubeta con leche que tiene una capacidad de $\frac{15}{6}$ litros se quieren llenar botellas de $\frac{1}{2}$ litro ¿Cuántas botellas se podrán llenar?

5. Encuentra qué operación resuelve cada enunciado.

$$a) 5 \frac{1}{4} \div \frac{3}{4} \quad b) 5 \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \quad c) 15.5 \times 0.1 \quad d) 15.5 \div 0.1$$

1) El kg de queso cuesta \$ 15.5. Si Juan compró 100g, ¿cuánto debe pagar?

2) De un rollo de alambre de 5 m y un cuarto, Rodrigo usó, para armar su maqueta, tres cuartas partes, ¿cuántos metros usó?

3) En el supermercado preparan el jamón en paquetes de 100 g. Si Roberto cortó 15 kg y medio de jamón, ¿cuántos paquetes armó?

4) Pablo quiere colocar 5 litros y un cuarto de jugo en botellas de tres cuartos de litro ¿Cuántas botellas puede preparar?

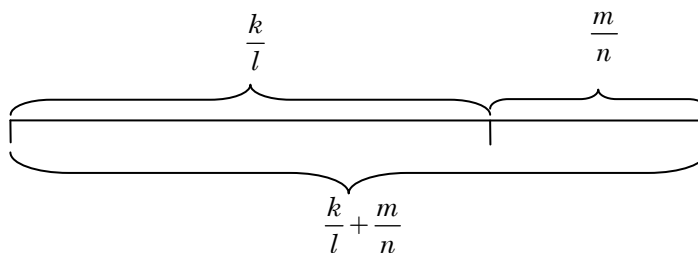
5.3 Definiciones de operaciones básicas (Suma, resta y multiplicación) ²

Hasta ahora no hemos dicho nada acerca de que significan las operaciones entre números, de manera que todavía no estamos en condiciones de contestarle a nuestra hermana Verónica que significa la multiplicación de dos fracciones. Ahora vamos a dar definiciones operacionales de las operaciones básicas entre fracciones e intentaremos demostrar algunos resultados.

Definición operacional de suma de fracciones:

Dadas las fracciones $\frac{k}{l}$ y $\frac{m}{n}$, definimos la **suma** $\frac{k}{l} + \frac{m}{n}$ como:

$\frac{k}{l} + \frac{m}{n}$ = la longitud de dos segmentos concatenados, uno de longitud $\frac{k}{l}$, seguido de otro de longitud $\frac{m}{n}$.



¿Cómo construirías un segmento de longitud $\frac{k}{l}$?

Actividad 5.3.1

Aplica la definición operacional y realiza las siguientes sumas de fracciones:

1) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} =$

² Esta sección y la que sigue requieren del acompañamiento cercano y exposición del profesor. Estas actividades *no* están diseñadas para que el estudiante las realice solo.

2) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$

3) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$

4) $\frac{3}{5} + \frac{5}{4} =$

5) $(\frac{2}{5} + \frac{1}{6}) + \frac{4}{3} =$

Actividad 5.3.2

Utiliza la definición operacional de suma de fracciones para explicar por qué es cierto que para todos los números enteros a, b, k, l, m, n con b, m, l distintos de cero:

1) La forma de sumar fracciones con el mismo denominador es $\frac{k}{l} + \frac{m}{l} = \frac{k+m}{l}$.

2) La suma de fracciones es conmutativa. Esto es, $\frac{k}{m} + \frac{n}{l} = \frac{n}{l} + \frac{k}{m}$.

3) La suma de fracciones es asociativa. Esto es, $\frac{a}{b} + \left(\frac{k}{m} + \frac{n}{l}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{k}{m}\right) + \frac{n}{l}$.

Actividad 5.3.3

Utiliza los resultados de la Actividad 4.11.8 (fracciones equivalentes) y el resultado de la parte A de la actividad anterior para mostrar que

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + lm}{ln}.$$

¡Esta es la fórmula que has usado siempre para sumar fracciones! Si te es difícil empezar usando letras, empieza por darle valores numéricos a las letras para que te des una idea de lo que está pasando.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 5.3.4

Haciendo uso de todo lo que hemos visto hasta ahora, explica por qué $4.0451 + 7.28 = 11.3251$ (Vas a tener que usar varias definiciones operacionales)

Definición operacional de resta de fracciones:

Dadas las fracciones $\frac{k}{l}$ y $\frac{m}{n}$, definimos la **resta** $\frac{k}{l} - \frac{m}{n}$ como:

$\frac{k}{l} - \frac{m}{n}$ = la longitud del segmento restante cuando un segmento de longitud $\frac{m}{n}$ es tomado de uno de los extremos de un segmento de longitud $\frac{k}{l}$.

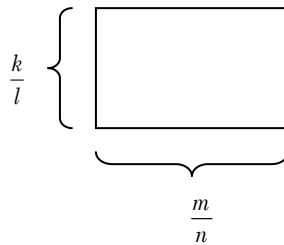
Actividad 5.3.5

Haz un dibujo que represente la definición operacional de resta que acabamos de dar. ¿Hay alguna diferencia si tomas el extremo izquierdo o el derecho del segmento de longitud $\frac{k}{l}$ al hacer la resta? Explica.

Definición operacional de multiplicación de fracciones:

Dadas las fracciones $\frac{k}{l}$ y $\frac{m}{n}$, definimos la **multiplicación** $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ como:

$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ = el área del rectángulo cuyos lados miden $\frac{k}{l}$ y $\frac{m}{n}$.



Es importante notar que, en este caso, la unidad es el cuadrado unitario, es decir, un cuadrado cuyo lado mide 1.

Actividad 5.3.6

Realiza las siguientes multiplicaciones aplicando las definiciones operacionales (sólo puedes utilizar lo que hemos definido hasta ahora). En cada caso, haz esquemas y explica tu razonamiento.

1) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

2) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$

3) $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4}$

4) $\frac{5}{3} \times \frac{1}{2}$

5) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$

6) $\frac{7}{2} \times \frac{10}{6}$

¿Qué definiciones operacionales necesitaste? Explica.

Actividad 5.3.7

Aplica las definiciones operacionales para mostrar que:

1) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

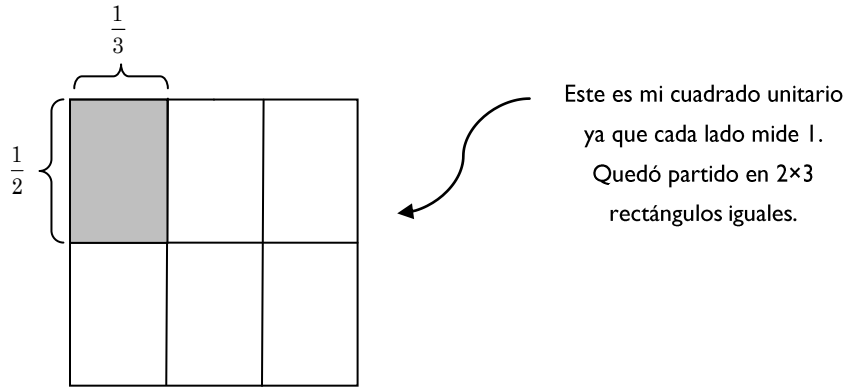
2) $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{7 \times 4} = \frac{6}{28}$

Actividad 5.3.8

Tres estudiantes discuten acerca de cómo contestaron el inciso 1) la actividad anterior:

Estudiante 1: "Para contestar el inciso 1), lo que hice fue primero dibujar un cuadrado unitario. Como sé que cada lado mide 1, entonces pude encontrar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ aplicando la definición operacional de fracción en cada lado. Con

esto dividí un lado en tercios y el otro en medios y cuadriculé el cuadrado unitario con $2 \times 3 = 6$ rectángulos iguales. Cada uno de estos rectángulos tiene lados que miden $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. Aquí me atoré".



Estudiante 2: "Para mi estuvo bastante fácil. Lo único que hice fue aplicar la fórmula para la multiplicación de fracciones. Multipliqué numerador por numerador y denominador por denominador y encontré que el área del rectángulo representa $\frac{1}{6}$ de la unidad, que en este caso es un cuadrado unitario".

Estudiante 3: "Creo que no se puede aplicar la fórmula para la multiplicación de fracciones pues, hasta ahora, sólo hemos definido la multiplicación como el área de un rectángulo. Yo intenté aplicar la definición operacional de multiplicación de fracciones. Dibujé un rectángulo de un medio por un tercio e intenté encontrar el área. Como el área es el número de cuadrados unitarios que entran dentro de la figura traté de contar cuadrados unitarios, pero no encontré ninguno. Tal vez el área es menos que un cuadrado unitario pero no supe que hacer para saber que fracción de éste sería".

- 1) ¿Con cuáles estudiantes estás de acuerdo y con cuáles no? En cada caso, explica tu razonamiento.

- 2) Si lo consideras necesario regresa a la actividad anterior y modifica tus respuestas.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 5.3.9

Con base en lo que hiciste en las actividades anteriores muestra que:

$$1) \quad \frac{1}{l} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{l \times n} = \frac{1}{ln}$$

$$2) \quad \frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$$

¡Esta última es la famosa fórmula para la multiplicación de fracciones!

Actividad 5.3.10

Regresa a la Actividad 5.0 y:

- 1) Vuelve a escribir un diálogo con tu hermana en donde le expliques por qué $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$ y que significa este resultado. ¿Estás conforme con tu explicación?
- 2) ¿Qué diferencias observas entre la primera explicación que diste y la que acabas de dar? ¿Qué similitudes?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 5.3.11

Utiliza todo lo aprendido hasta ahora para mostrar que (con l , n y b distintos de cero),

$$\frac{k}{l} \times \left(\frac{m}{n} + \frac{a}{b} \right) = \left(\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} \right) + \left(\frac{k}{l} \times \frac{a}{b} \right).$$

Esta es la ley distributiva y la usaremos mucho.

- 1) Primero muestra esto geométricamente, es decir, aplica las definiciones operacionales y haz los rectángulos que corresponden. ¿Qué es lo que hay que mostrar? Explica.
- 2) Después, usa los resultados de las actividades 5.3.3, 5.3.9, y la ley distributiva de los enteros para mostrar que los dos lados son iguales.

Actividad 5.3.12

Justifica las siguientes aseveraciones haciendo uso de las definiciones operacionales:

- 1) Dos números (fracciones) que son iguales permanecen iguales al ser multiplicados por el mismo número (fracción). Esto es, si a , b y c son números (fracciones) y $a = b$, entonces, $ac = bc$.
- 2) Dos números (fracciones) que son iguales permanecen iguales cuando se les suma el mismo número (fracción). Esto es, si a , b y c son números (fracciones) y $a = b$, entonces, $a + c = b + c$.

Nota importante: En esta actividad las aseveraciones son acerca de números, de manera que son válidas para todo punto sobre la recta numérica (o todo número real). Las definiciones que hemos dado hasta ahora son para fracciones pero resulta que se pueden extender a todos los números reales. De hecho *toda la información acerca de las operaciones aritméticas en fracciones se puede extrapolar a los números reales*. Esta extrapolación es parte del contenido de un curso de cálculo. Por ahora es importante que sepas que todos los resultados generales que obtuviste para fracciones (como la conmutatividad, la asociatividad, la distributividad, etc.) resultan ser válidos para todo número real. Esto nos será muy útil cuando estudiemos representaciones algebraicas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza las definiciones operacionales para mostrar que $2.5 \times 0.43 = 1.075$.
2. Aprovecha el ejemplo del problema anterior para explicar de dónde sale la regla de “mover el punto decimal” cuando se multiplican números decimales. Esta es:
 - 1) Multiplica los dos números como si fueran números enteros ignorando los puntos decimales.

- 2) Cuenta el número de dígitos decimales de los dos números, supongamos que son x .
- 3) Pon el punto decimal en el número entero que te dio en 1) de manera que tenga x dígitos decimales.

Si lo haces con cuidado encontrarás una relación entre cada uno de los puntos anteriores y los pasos que seguiste para mostrar que $2.5 \times 0.43 = 1.075$.

3. Utiliza la definición operacional de multiplicación de fracciones para explicar por qué es cierto que para todos los números enteros a, b, k, l, m, n con b, m, l distintos de cero:

- 1) La multiplicación de fracciones es conmutativa. Esto es, $\frac{k}{m} \times \frac{n}{l} = \frac{n}{l} \times \frac{k}{m}$.
- 2) La multiplicación de fracciones es asociativa. Esto es, $\frac{a}{b} \times \left(\frac{k}{m} \times \frac{n}{l} \right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{k}{m} \right) \times \frac{n}{l}$.

4. Vuelve a repetir lo que hiciste en la Actividad 5.3.11 pero ahora con:

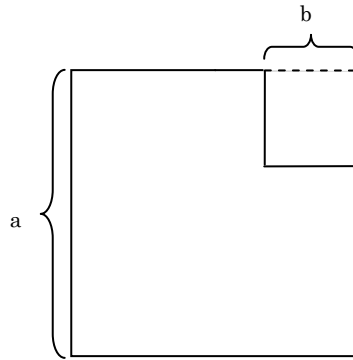
$$\frac{k}{l} \times \left(\frac{m}{n} - \frac{a}{b} \right) = \left(\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} \right) - \left(\frac{k}{l} \times \frac{a}{b} \right)$$

5. Muestra, aplicando las definiciones operacionales, que si A y B son fracciones entonces,

$$(A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2.$$

Un buen dibujo debería ser suficiente.

6. Un cuadrado de lado b es cortado de un cuadrado de lado a como se muestra en la figura.



- 1) Encuentra el área de la figura en términos de a y b .
- 2) Corta y combina las partes de la figura anterior para formar un rectángulo de lados $a+b$ y $a-b$.
- 3) ¿Cuál es su área? ¿Cómo se compara con el área de la figura inicial? Explica.
- 4) Utiliza los resultados de los incisos anteriores para escribir $a^2 - b^2$ en términos de $a+b$ y $a-b$.

- 5) ¿Qué tipo de números son a y b ? ¿Para qué tipo de números es válida la expresión que encontraste en el inciso 4)? Explica.
- 6) Usa el resultado anterior para calcular 101×99 sin necesidad de lápiz y papel.

Nota: Vas a necesitar los resultados de este problema para poder contestar la siguiente sección.

7. En este problema revisaremos una definición operacional alternativa de multiplicación de fracciones.

Definición operacional de multiplicación de fracciones: Dadas las fracciones $\frac{k}{l}$ y $\frac{m}{n}$, definimos la multiplicación $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ como:

$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$ = la longitud de la concatenación de k partes cuándo el segmento $\left[0, \frac{m}{n}\right]$ ha sido dividido en l partes iguales.

- 1) Utiliza la definición operacional para encontrar $\frac{2}{3} \times \frac{5}{12}$ y $\frac{15}{27} \times 2\frac{1}{8}$.
 - 2) Utiliza la definición operacional para mostrar que $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$.
 - 3) Argumenta, utilizando ejemplos y la definición operacional de multiplicación, por qué la expresión coloquial “dos tercios de 9.5 litros” corresponde a la multiplicación de $\frac{2}{3} \times 9.5$. Sugerencia: describe que tendrías que hacer para obtener “dos tercios de 9.5 litros” y compáralo con la definición operacional de $\frac{2}{3} \times 9.5$.
-

5.4 División de fracciones y fracciones complejas

Actividad 5.4.1

Después del éxito que tuviste al explicarle tan claramente a tú hermana Verónica lo último que te preguntó, ella te hizo propaganda en su escuela como “un gran explicador de cosas de matemáticas”. Así, se acercó Pedro, un estudiante de secundaria, con la siguiente duda:

"Yo ya estuve estudiando fracciones y más o menos las entiendo. Estaba resolviendo un problema de física y tuve que hacer $\frac{11.3}{52.2} + \frac{40.7}{0.17}$. Para resolver esta operación lo que hice fue:

$$\frac{11.3}{52.2} + \frac{40.7}{0.17} = \frac{(0.17 \times 11.3) + (52.2 \times 40.7)}{52.2 \times 0.17} = \frac{2126.461}{8.874} \simeq 239.628.$$

Para la primera igualdad utilicé la fórmula para la suma de fracciones y para la última igualdad usé la calculadora. Creo que no está bien hecho pues hasta donde yo sabía, la fórmula para la suma de fracciones sólo se vale para fracciones, es decir, cuando los denominadores y numeradores son números naturales. En este caso los numeradores y denominadores no son números naturales sino decimales así que no se si puedo aplicar la misma fórmula. ¿Me podrías explicar?"

Escribe un diálogo con Pedro en donde le expliques por qué sí o por qué no se puede aplicar la fórmula para la suma de fracciones en este problema.

Actividad 5.4.2

Una amiga de Pedro, Marina, también intentó resolver el problema y te dice lo siguiente:

"Me acordé que los decimales son fracciones así que reescribí la operación como:

$$\frac{11.3}{52.2} + \frac{40.7}{0.17} = \frac{\frac{113}{10}}{\frac{522}{10}} + \frac{\frac{407}{10}}{\frac{17}{100}} = \frac{1130}{5220} + \frac{40700}{170} = \frac{(170 \times 1130) + (5220 \times 40700)}{5220 \times 170} = \frac{212646100}{887400}.$$

La segunda igualdad la saqué aplicando la "Ley del Sándwich". Después, hice la suma de fracciones normal. No tengo ni idea de donde viene la "Ley del Sándwich" pero el maestro nos dijo que así se hacía la división de fracciones. ¿Me podrías explicar que significa la división de fracciones y de donde sale la Ley del Sándwich?"

Escribe un diálogo con Marina en donde le expliques: 1) que significa la división de fracciones (qué nos dice el resultado de la división acerca de los dos números que dividimos) y 2) cuál es la justificación de la ley del Sándwich.

¿Estás conforme con tu explicación? ¿Resolviste las dudas de Pedro y Marina?

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

De nueva vez, es posible que te haya resultado difícil contestar en forma clara las preguntas de Pedro y Marina. Veamos si podemos mejorar las cosas con un poco de trabajo.

Actividad 5.4.3

En cada caso encuentra el número que hace que la igualdad sea cierta:

1) $k \times 9 = 36$, $k = ?$

2) $r \times 12 = 72$, $r = ?$

3) $x \times 7 = 5$, $x = ?$

4) $y \times 25 = 53$, $y = ?$

5) $z \times \frac{2}{3} = 5$, $z = ?$

6) $l \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$, $l = ?$

7) $s \times \frac{7}{9} = \frac{52}{20}$, $s = ?$

Si A y B son números naturales ¿podrás encontrar siempre un número natural C que haga que la igualdad $C \times B = A$ sea cierta? Explica utilizando los ejemplos anteriores.

Actividad 5.4.4

Si A y B son fracciones ¿podrías encontrar una fracción C tal que $A = CB$? Explica utilizando los ejemplos anteriores.

Las actividades anteriores nos motivan a dar la siguiente definición operacional de división de fracciones:

Definición operacional de división de fracciones: Si A y B son fracciones (con $B \neq 0$), entonces la división de A entre B, denotada por $\frac{A}{B}$ ó $A \div B$ es la fracción única C tal que $A = CB$.

Podemos escribir la definición operacional anterior como: Si A y B son fracciones (con $B \neq 0$), entonces

$$\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = CB$$

Donde el símbolo “ $\Leftrightarrow$ ” significa “es equivalente a”.

Actividad 5.4.5

Usa la definición operacional de producto de fracciones para mostrar que si $A = \frac{k}{l}$ y $B = \frac{m}{n}$, entonces el valor de C que hace cierta la igualdad es:

$$C = \frac{kn}{lm} = \frac{k}{l} \times \frac{n}{m}$$

Esta es la regla que aprendiste en la primaria para dividir fracciones (que es también la “ley del sándwich”),

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{k}{l}}{\frac{m}{n}} = \frac{kn}{lm} = C$$

Definimos una “fracción compleja” como la fracción $\frac{A}{B}$ que se obtiene al dividir dos fracciones A y B (con $B \neq 0$). Observa que la fracción compleja $\frac{A}{B}$ es tan sólo una fracción (más precisamente, es la fracción C que encontraste en la Actividad 5.4.5).

Actividad 5.4.6

Haz uso de todo lo que hemos visto hasta ahora para mostrar que si A, B, C, D, F, E son fracciones con B, D y F distintos de cero, entonces se cumple lo siguiente:

$$1) \quad A \times \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}.$$

$$2) \quad \text{Si } C \neq 0, \text{ entonces } \frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}.$$

$$3) \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}.$$

$$4) \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

$$5) \quad \text{La ley distributiva } \frac{A}{B} \times \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F} \right) = \left(\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \right) + \left(\frac{A}{B} \times \frac{E}{F} \right)$$

Observa que ya hemos probado que las anteriores son ciertas cuando A, B, ..., F son *números naturales*. Ahora lo mostrarás para *cualquier fracción* (Ayuda: Te será útil escribir las fracciones en la forma que conoces y sabes manejar, por ejemplo, $A = \frac{k}{l}$, $B = \frac{m}{n}$, etc. . Vas a tener que usar el hecho que ya mostraste que estas propiedades son válidas para fracciones y hacer algunas manipulaciones algebraicas.

Pista: Hay una manera geométrica fácil de mostrar el inciso 5).

¿Qué relación tiene lo que acabas de mostrar con la pregunta de Pedro? Explica.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 5.4.7

Un cable de 767 metros de largo es cortado en piezas de 13 metros de largo. ¿Cuántas piezas cortas se obtendrán?

- 1) ¿Qué operación hay que hacer para obtener el resultado? Explica
- 2) ¿Cómo interpretarías el resultado? Ayuda: Utiliza la definición operacional de división y multiplicación (la definición de multiplicación que se dio en el problema 7 de la sección anterior).

Actividad 5.4.8

Una varilla de $15\frac{5}{7}$ metros de largo es cortada en piezas de $2\frac{1}{8}$ metros de largo. ¿Cuántas piezas cortas se obtendrán?

- 1) ¿Qué operación hay que hacer para obtener el resultado? Explica
- 2) ¿Cómo interpretarías el resultado? Ayuda: Utiliza la definición operacional de división y multiplicación (la definición de multiplicación que se dio en el problema 7 de la sección anterior). Necesitarás escribir alguna fracción mixta como suma y aplicar la ley distributiva.

Actividad 5.4.9

Tres estudiantes discuten como resolvieron las actividades anteriores:

Estudiante 1: "En el inciso 1) de las dos actividades yo contesté que la operación que había que hacer era una división. La división de 767 entre 13, nos dice el número de veces que cabe 13 en 767, en este caso, 59. Esto lo sé porque $59 \times 13 = 767$, es decir, si sumo 59 veces 13 tengo exactamente 767. Cuando hice la división en el segundo problema me salió $7\frac{47}{119}$ pero no pude interpretar este número".

Estudiante 2: "Yo intenté aplicar la definición operacional de la división. Entonces,

$$\frac{15\frac{5}{7}}{2\frac{1}{8}} = 7\frac{47}{119}$$

significa que (o es equivalente a)

$$15\frac{5}{7} = 7\frac{47}{119} \times 2\frac{1}{8}.$$

Después seguí la sugerencia de escribir las fracciones mixtas como suma de fracciones y obtuve,

$$\left(15 + \frac{5}{7}\right) = \left(7 + \frac{47}{119}\right) \times \left(2 + \frac{1}{8}\right)$$

No supe como utilizar esto para interpretar que me dice el número $7\frac{47}{119}$ acerca del problema".

Estudiante 3: "Yo tampoco lo pude resolver bien. Creo que el $7\frac{47}{119}$ nos dice el número de veces que cabe el $2\frac{1}{8}$ en el $15\frac{5}{7}$, como siete veces y cacho, pero no pude encontrar una justificación. Ahora que veo lo que hicieron creo que las instrucciones decían que sólo hay que poner una de las fracciones mixtas como suma de fracciones. Yo pondría el $7\frac{47}{119}$ pues es el número que queremos interpretar. Además no hemos usado la propiedad distributiva."

- 1) ¿Con cuáles estudiantes estás de acuerdo y con cuáles no? En cada caso, explica tu razonamiento.
- 2) Si lo consideras necesario, regresa a la actividad anterior y modifica tus respuestas.
- 3) ¿Qué relación tiene lo que acabas de hacer con la pregunta de Marina? Explica.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 5.4.10

Escribe un diálogo con Pedro y Marina donde des respuestas claras a las preguntas que hicieron.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

I. Aplicando las definiciones operacionales escribe la división de los decimales $\frac{21.87}{3.0925}$ como una división de números enteros. Luego intenta escribir esta fracción como un número decimal finito. ¿Qué sucede? ¿es posible? Explica.

5.5 Autoevaluación

Resuelve los siguientes ejercicios, al hacerlo usa el Formato de resolución de problemas ubicado en el apéndice de este libro.

- 1 Si gasté $\frac{3}{7}$ de mi quincena en pagar la renta y $\frac{1}{5}$ en irme de vacaciones, ¿qué fracción de ésta me queda? Tomando en cuenta que gano \$ 3500, ¿cuánto dinero me queda?
- 2 Quiero repartir $\frac{20}{3}$ kg de maíz en paquetes de $\frac{2}{3}$ kg ¿Cuántos paquetes podré armar?
- 3 El kilogramo de azúcar cuesta \$ 7 ¿Cuánto pagaré por $\frac{5}{3}$ kg de azúcar?
- 4 Un ciclista recorrió ayer $\frac{2}{7}$ de su trayecto y hoy $\frac{2}{5}$ del mismo ¿Qué fracción le falta recorrer?
- 5 Mi abuelita Annel tiene $2\frac{7}{10}$ de pastel. Le dio $\frac{2}{5}$ a mi hermano Arturo y $\frac{3}{2}$ a mi tía Aída. Si el resto es para mí, ¿cuánto pastel me corresponde?

Objetivos de aprendizaje del capítulo 5

Después de haber terminado este capítulo debes de ser capaz de hacer las siguientes cosas:

- 1 Describir, con tus propias palabras, el conjunto de actividades, problemas o ejercicios que te llevaron a entender por qué hay que sacar el “común denominador” para sumar o restar fracciones con diferente denominador. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques como se fueron resolviendo con las actividades.
- 2 Describir, con tus propias palabras, el conjunto de actividades, problemas o ejercicios que te llevaron a poder decidir cuando hay que multiplicar y cuándo hay que dividir fracciones en un problema dado. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques como se fueron resolviendo con las actividades.
- 3 En un problema, identificar los siguientes aspectos:
 - Cuando hay que sumar y cuando hay que restar.
 - Cuando hay que multiplicar y cuando hay que dividir.
 - Que fracción representa el entero.
 - Como se calculan cantidades como: $\frac{3}{5}$ de \$1500 o $\frac{2}{7}$ de 120 kg.
- 4 Formular y resolver problemas como los del final del capítulo (Autoevaluación) aplicando el “Formato para la resolución de problemas”.

Haciendo uso de las definiciones operacionales y los resultados obtenidos:

- 5 Decir quién es mayor 0.12 ó 0.118 . Explicar
- 6 Justificar por qué $1.23=1.2300$
- 7 Dar explicaciones a Verónica, Pedro y Marina.

CAPÍTULO 6

Razones y Proporciones

Números grandes (adaptación)

Adrián Paenza¹

¿Números grandes? Si, grandes. Difíciles de imaginar. Uno escucha que las deudas externas de algunos países se manejan en miles de millones de dólares, que las estrellas en el cielo están a años luz de la Tierra, que la molécula de ADN contiene tres mil millones de nucleótidos, que la superficie del sol tiene una temperatura de seis mil grados centígrados, etcétera. Estoy seguro que cualquiera que esté leyendo este párrafo tiene sus propios ejemplos.

Lo que yo hago frente a estas magnitudes es compararlas; contrastarlas con algo que me sea más fácil representar. En el mundo hay seis mil quinientos millones de personas. En realidad ya somos (en agosto de 2005) más de seis mil trescientos millones. Parece mucho. Pero, ¿qué es mucho? Veamos, ¿qué diferencia hay entre un millón y mil millones? (aparte de que el último número tiene tres ceros mas). Para ponerlo en perspectiva transformemos estas cifras en segundos. Por ejemplo, supongamos que en un pueblo en donde el tiempo sólo se mide en segundos una persona está acusada de cometer un delito. Se enfrentan el fiscal y el abogado defensor delante del juez que interviene en la causa. El fiscal pide “mil millones de segundos para el reo”; el defensor lo tilda de “loco” y sólo está dispuesto a aceptar “un millón de segundos y sólo como un hecho simbólico”. El juez, acostumbrado a medir el tiempo de esta forma, sabe que la diferencia es abismal. ¿Entienden las razones? Píenselo así: un millón de segundos son aproximadamente once días y medio; en cambio, mil millones de segundos significan casi... ¡32 años!

Este ejemplo muestra que, en general, no tenemos idea de lo que representan los números, aun en nuestra vida cotidiana. Volvamos al tema de los habitantes de la Tierra. Si somos seis mil millones y pusieran las fotos de cada uno en un libro, cuyas hojas fueran de una décima de milímetro de espesor y colocamos diez personas por página y utilizando las dos caras de la hoja... el libro tendría, ¡30 kilómetros de alto! Además, si una persona estuviera ávida por mirar las fotos, y tardara un segundo por hoja para recorrer las diez, y le dedicara 16 horas diarias, le llevaría 28 años y medio

¹ Paenza, Adrián. *Matemáticas... ¿estás ahí?, sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Buenos Aires, Siglo XXI Editores Argentina, 2005, págs. 17-19.

mirarlas todas. Con todo, cuando llegara al final, en el año 2033, el libro ya habría aumentado de tamaño, porque ya seríamos dos mil millones de personas más, y el libro tendría otros diez kilómetros de espesor.

Pensemos ahora, en la superficie necesaria para reunir a toda la población de la Tierra en un mismo lugar. El estado de Texas (el de mayor superficie en los Estados Unidos, exceptuando Alaska) podría albergarnos a todos. Si; Texas tiene una superficie habitable de, aproximadamente, 420000 kilómetros cuadrados. Por lo tanto, podríamos juntarnos en Texas y tener cada quien una parcela de 70 metros cuadrados para vivir. ¿No esta mal, no?

Ahora, pongámonos en fila ocupando cada persona un espacio de 30 centímetros cuadrados. En este caso la humanidad entera formaría una línea de más de 1680000 kilómetros. Esto nos permitiría dar 42 veces la vuelta al globo terráqueo por el Ecuador.

¿Qué pasaría si todos nos quisiéramos transformar en artistas de cine y filmáramos una película con nosotros como estrellas? Es decir, si cada persona apareciera 15 segundos (un poco menos de siete metros de celuloide por humano) necesitaríamos unos ¡40 millones de kilómetros de negativo!, además, si alguien quisiera verla, tendría que estar en el cine 23.333.333 horas. Es decir, 972.222 días, lo que significan unos 2.663 años. Y esto sucedería siempre y cuando decidamos no dormir, comer ni hacer otra cosa en la vida. Sugiero que nos organicemos para verla y después nos reunamos para contarnos la película.

Actividad 6.0

Si México tiene una población de 100 millones de personas aproximadamente. Intenta plantear, por lo menos, dos ejemplos como los que acabas de revisar.

6.1 Multiplicar o dividir

Actividad 6.1.1

Cristina quiere formar bolsitas con 14 dulces cada una.

- 1) Si formó 23 bolsitas, ¿cuántos dulces usó?
- 2) Y si usó 812 dulces, ¿cuántas bolsitas podrá formar?

Actividad 6.1.2

Un paquete de harina cuesta \$16.



- 1) Determina cuánto cuesta:

5 paquetes

HARINA	HARINA	HARINA	HARINA	HARINA
--------	--------	--------	--------	--------

3.5 paquetes

HARINA	HARINA	HARINA	HAR
--------	--------	--------	-----

2.25 paquetes

HARINA	HARINA	H
--------	--------	---

Explica, en cada caso, qué pasos usaste para determinar tu resultado. No uses regla de tres.

- 2) Determina cuántos paquetes de harina se pueden comprar con las siguientes cantidades: \$80, \$192 y \$240. Realiza un esquema que te ayude a visualizar la situación.

Actividad 6.1.3

Con \$ 1 puedo comprar 20 g de cal.

Cal
20g
\$1

- 1) ¿Qué cantidad de cal podré comprar con \$5?

A continuación se muestran los pasos para contestar ésta pregunta usando esquemas. Explica, con tus palabras, cada uno ellos.

I)

Cal
20 g
\$1

II)

Cal	Cal	Cal	Cal	Cal
20g	20g	20g	20g	20g
\$1	\$1	\$1	\$1	\$1

III)

$5 \times 20 \text{ g} = 100\text{g}$ $\text{\$5}$
--

- 2) ¿Cuánto me costarán 140 g de cal?

Los pasos a seguir para resolver el problema son los que se muestran a continuación. Dibuja los esquemas que acompañan a cada explicación.

- I) Cada paquetito de \$1 contiene 20g de cal.

- II) Si tengo un paquete grande, de 140g de cal, me puedo preguntar: ¿cuántos paquetitos entran este paquete?

Como cada paquetito tiene 20g, entonces en el paquete entran $\frac{140}{20} = 7$ paquetitos.

- III) Si cada paquetito cuesta \$1 y siete de ellos forman un paquete grande; el precio de él será de \$7.

- 3) Después del inciso 2), puede que quieras agregar algún comentario al inciso 1). Si es así, rescríbelo nuevamente.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Si un paquete de azúcar de 1 kg cuesta \$ 8.5.

Encuentra lo que se te pide en cada caso al hacerlo dibuja un esquema y explica los pasos que realizaste para llegar al resultado.

- 1) ¿Cuántos kg de azúcar podré comprar con \$ 144.5?
- 2) ¿Cuánto me costarán 6 kg y un cuarto de azúcar?

2. Considera, al igual que en el ejercicio anterior, que un paquete de azúcar de 1 kg cuesta \$ 8.5. A continuación se muestran las soluciones de dos problemas. Redacta los enunciados de cada uno de ellos y explícalos.

- 1) $8.5 \times 23 = 195.5$
- 2) $\frac{297.5}{8.5} = 35$

6.2 Razones

Actividad 6.2.1

Si tres kilogramos de harina cuestan \$18.

- 1) ¿Cuánto cuesta 1 kg de harina?
- 2) ¿Qué cantidad de harina puedo comprar con \$1?

Actividad 6.2.2

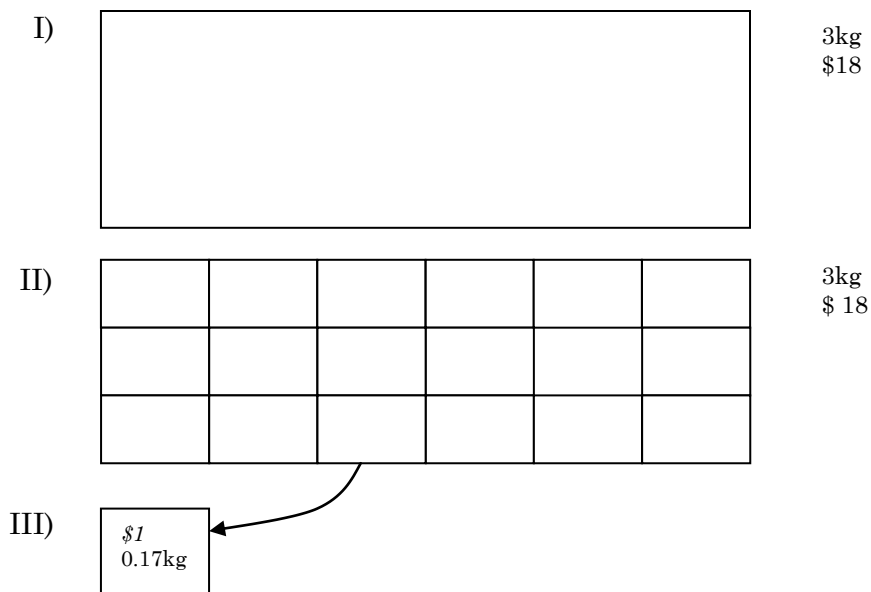
Considera el inciso 1) de la actividad anterior. Los pasos a seguir para resolver el problema son los que se muestran a continuación. Dibuja los esquemas que acompañan a cada explicación.

- 1) Se tiene que un paquete de 3 *kg* cuesta \$18.
- 2) Se quiere ver cuántos paquetitos de 1 *kg* entran en el paquete. Como el paquete pesa 3 *kg*, lo podemos dividir en tres paquetitos de 1 *kg* cada uno.
- 3) Cada paquetito pesa 1 *kg*. Como el paquete grande cuesta \$18 y lo dividimos en tres paquetitos iguales, cada paquetito costará $\$ \frac{18}{3} = \6 . Por lo tanto, 1 *kg* de harina cuesta \$6.

La fracción $\frac{18}{3}$ se puede interpretar como el dinero necesario para comprar 1 *kg* de harina.

Actividad 6.2.3

- 1) Ahora vamos a resolver el inciso 2) de la Actividad 6.2.1. Para contestar ésta pregunta usando esquemas se muestran los siguientes pasos. Explica, con tus palabras, cada uno ellos.



- 2) ¿Cómo interpretarías la fracción $\frac{3}{18}$?

Al cociente de la división de a entre b lo llamamos la “razón entre los números a y b ”, es decir:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \text{razón}$$

Actividad 6.2.4

Con \$ 228 puedo comprar 3 litros de pintura verde.

- 1) ¿Cuánto dinero me costará un litro de pintura? Realiza un esquema y explica los pasos que seguiste para llegar a la solución.
- 2) ¿Qué cantidad de pintura puedo comprar con \$1? Realiza un esquema y explica los pasos seguidos para llegar a la solución.
- 3) En otro negocio puedo comprar 3.5 litros de la misma pintura con \$ 266. Los siguientes números indican la cantidad de pintura que puedo comprar con \$1 y el precio de 1 litro de pintura. Indica cuál es cada uno.

$$\frac{266}{3.5}$$

$$\frac{3.5}{266}$$

- 4) ¿En cuál negocio me conviene comprar la pintura?

Actividad 6.2.5

- 1) Considera el inciso 3) de la Actividad 6.2.4, ¿qué interpretación le darías al número?

$$266 + 3.5$$

- 2) ¿Qué puedes concluir con base en el inciso anterior?
- 3) Explica, nuevamente, qué es la interpretación de un número calculado y cómo se obtiene o encuentra. En tu explicación incluye el hecho de que a veces tiene sentido dar una interpretación a un número calculado y otras veces no.



Discute tus respuestas con el profesor.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Para recorrer 100km en mi automóvil utilizo 8 litros de gasolina. Realiza un esquema y explica los pasos que seguiste para llegar a la solución de las siguientes preguntas.

- 1) ¿Cuántos km puedo recorrer con 1 litro de gasolina?
- 2) ¿Cuántos litros de gasolina uso para recorrer 1 km?

En el automóvil de mi amigo Jerónimo puedo recorrer 112 km con 8.5 litros de gasolina.

- 3) ¿Cómo interpretarías los siguientes números?

$$a) \frac{112}{8.5} \quad b) \frac{8.5}{112}$$

- 4) ¿Cuál automóvil gasta menos gasolina? Explica.

2. Si viajo en mi automóvil a velocidad constante puedo recorrer 120km en 3hrs. ¿Qué interpretación le darías a los siguientes números? Realiza un esquema.

$$a) \frac{120}{3} \quad b) \frac{3}{120} \quad c) 120 + 3$$

3. En un periódico se lee el siguiente encabezado: “En la Ciudad de México hay 2 autos por cada 10 personas” ¿Qué interpretación le darías a los siguientes números? Realiza un esquema.

$$a) \frac{10}{2} \quad b) \frac{2}{10}$$

4. De una cinta de 3.5 m corto un pedazo de 2 m ¿Qué interpretación le darías a los siguientes números? Realiza un esquema.

$$a) \frac{3.5}{2} \quad b) 3.5 + 2 \quad c) 3.5 - 2 \quad d) \frac{2}{3.5}$$

5. En una vinatería tienen dos recipientes. Uno grande que está parcialmente lleno y tiene 23 litros de vino y otro pequeño que tiene una capacidad de 15 litros y está vacío. Los empleados tienen que transferir el vino al recipiente pequeño y guardar el exceso. Da, si existe, una interpretación de los siguientes números. Realiza un esquema.

$$a) 15 \times 23 \quad b) 23 + 15 \quad c) 23 - 15$$

6. En la tienda A 132 kg de maíz me cuestan \$28.3. En la tienda B, 198 kg del mismo maíz me cuestan \$42.3 ¿En cuál tienda me conviene comprar el maíz?

7. En una tienda venden dulces en paquetes con las siguientes características:

15 dulces a \$56
24 dulces a \$88
36 dulces a \$133

¿Cuál paquete ofrece el mejor precio? Explica tu respuesta.

6.3 Proporciones

Actividad 6.3.1

En este problema los cálculos ya están hechos. Las preguntas son acerca del razonamiento realizado en cada paso.

Si 7.2 *kg* de maíz cuestan \$ 32.4. Determina el precio de 19 *kg*.

$$\text{Paso 1} \quad \frac{32.4}{7.2} = 4.5$$

$$\text{Paso 2} \quad 4.5 \times 19 = 85.5$$

- 1) ¿Cómo interpretas el número 4.5?
- 2) Haz un diagrama para explicar por qué se divide en el paso 1.
- 3) ¿Cómo interpretas el número 85.5?
- 4) Haz un diagrama para explicar por qué se multiplica en el paso 2.

Actividad 6.3.2

En este problema los cálculos ya están hechos. Las preguntas son acerca del razonamiento realizado en cada paso.

Problema: 7.2 *kg* de maíz cuestan \$ 32.4. Determina el precio de 19 *kg* de maíz.

$$\text{Paso 1} \quad \frac{7.2}{32.4} = 0.\widehat{2}$$

$$\text{Paso 2} \quad \frac{19}{0.2} = 85.5$$

- 1) ¿Cómo interpretas el número 0. $\widehat{2}$?
- 2) Haz un diagrama para explicar por qué se divide en el paso 1.
- 3) ¿Cómo interpretas el número 85.5?
- 4) Haz un diagrama para explicar por qué se divide en el paso 2.

Actividad 6.3.3

En las actividades 3.3.1 y 3.3.2 se resolvió el mismo problema pero de dos maneras diferentes. Explica las diferencias y similitudes de ambos caminos de resolución.

Actividad 6.3.4

En un mercado 3.5 kg de arroz cuestan \$ 21. Realiza un esquema y explica cada paso para encontrar los siguientes datos:

- 1) El precio de 1 kg.
- 2) El precio de 12.2kg.
- 3) La cantidad de arroz que se puede comprar con \$128.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resuelve los siguientes ejercicios. En los ejercicios 1 y 2 usa el *Formato de resolución de problemas* ubicado en el Apéndice de este libro.

1. Una planta crece 15 mm en 36 días.

- 1) ¿Cuánto crece en un día?
- 2) ¿En cuántos días crecerá 135 mm?

2. Para realizar 4.5 kg de masa de pan necesito 2.25 litros de leche y 3.8 kg de harina.

- 1) ¿Cuánta masa haré con 7.3 litros de leche?
- 2) Para hacer 12.4 kg de masa, ¿cuánta harina necesito?

3. En un laboratorio se prepara una solución con 2.5 litros de agua y 0.56 kg de sal. Si se quiere preparar una solución de la misma concentración con 3.2 litros de agua, ¿cuánta sal se necesitará?

Resuelve este problema de dos maneras distintas:

- 1) Usando el número $\frac{2.5}{0.56}$
- 2) Usando el número $\frac{0.56}{2.5}$

6.4 Regla de tres

Actividad 6.4.1

En una tienda, 112 *kg* de maíz cuestan \$37. Determina el precio de 67 *kg* maíz. Usa el método de razonamiento en proporciones que vimos en la sección anterior.

Actividad 6.4.2

Para resolver el problema anterior, Alejandro y María usaron la regla de tres simple directa:

$$\begin{array}{rcl} 112 \text{ kg} & \rightarrow & \$ 37 \\ 67 \text{ kg} & \rightarrow & x \end{array}$$

Alejandro plantea:

$$x = \frac{112 \times 37}{67} = \frac{112}{67} \times 37$$

María no está de acuerdo con el procedimiento de Alejandro. Para ella se haría de la siguiente manera:

$$x = \frac{37 \times 67}{112} = \frac{37}{112} \times 67$$

- 1) ¿Con quién estás de acuerdo?
- 2) Explica qué haces al usar la regla de tres. Usa los resultados del inciso anterior y de la Actividad 6.4.1.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 6.4.3

Resuelve, usando regla de tres simple directa, los problemas 1 y 2 de la sección Ejercicios y Problemas anterior. Usa, en cada problema, el Formato de resolución de problemas.

6.5 Magnitudes directamente proporcionales

Actividad 6.5.1

- 1) Si 6 obreros demoran 18 horas para construir un muro ¿Cuánto tiempo demorará un obrero en construir el mismo muro?
- 2) Carolina dice que $\frac{18}{6} = 3$ horas es el tiempo que tarda un obrero en construir el muro ¿Estás de acuerdo con ella? Explica.

Actividad 6.5.2

Raúl dice: El resultado de Carolina no es posible, es ilógico. Un único obrero debería tardar más que 6 obreros. Por lo tanto, el resultado debería ser más que 18 horas y no 3 horas como encuentra Carolina.

Después de escuchar el argumento de Raúl ¿Con quién de los dos coincides?

Actividad 6.5.3

- 1) ¿Cuánto tiempo demorará un obrero en construir el mismo muro? Explica cómo llegas al resultado.
- 2) Explica, con tus palabras, cuando es posible aplicar la regla de tres y cuando no.

La actividad anterior nos muestra que no siempre es posible aplicar la regla de tres simple directa. Para poder aplicarla es necesario que las cantidades involucradas en el problema sean directamente proporcionales. A continuación aprenderemos a identificar cuando dos cantidades son directamente proporcionales.

Actividad 6.5.4

Usa la respuesta que diste en la Actividad 6.5.3, inciso 2) e indica en cuáles de los siguientes problemas se puede aplicar la regla de tres simple directa y en cuáles no. Explica claramente tu respuesta.

- 1) En el supermercado, 12 adornos de navidad cuestan \$ 23 ¿Cuánto costarán 120 adornos del mismo tipo?

- 2) Para llenar una alberca en 16 horas se necesitan 4 bombas ¿Cuántas bombas se necesitarán para llenar esta alberca en 8 horas?
- 3) Para alimentar a cinco perros por un día se necesitan aproximadamente 7 kg de alimento ¿Cuántos kg de alimento se necesitarán para alimentar a 12 perros?

Actividad 6.5.5

En una tienda 24 kilogramos de frijoles cuestan \$ 84. Completa la tabla.

Kilogramos de frijoles	Precio
24	\$ 84
48	
	\$ 42
120	
	\$ 252
3	

Actividad 6.5.6

Respecto a la actividad anterior, responde:

- 1) ¿Qué sucede con el precio si duplico la cantidad de frijoles que compro? (se duplica, se reduce a la mitad, queda igual, aumenta pero no puedo decir cómo, disminuye pero no puedo decir cómo).
- 2) ¿Qué sucede con el precio del total si reduzco a la mitad la cantidad de frijoles que compro?
- 3) ¿Qué sucede con el precio del total si quintuplico la cantidad?
- 4) ¿Qué sucede con la cantidad de frijoles que compro si se triplica el precio?

Dos cantidades, como el precio y la cantidad de frijoles, se llaman magnitudes directamente proporcionales. Éstas tienen la propiedad de que si una se duplica, la otra también lo hace. Si una se triplica, la otra también se triplica, etc.

Actividad 6.5.7

Explica claramente por qué el número de obreros y el tiempo necesario para construir un muro no son magnitudes directamente proporcionales (Si te es de utilidad, usa los datos dados en la Actividad 6.5.1).

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

Actividad 6.5.8

Revisa la Actividad 6.5.4. Si encuentras algún error en tu respuesta, explica dónde y por qué está mal.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Usando la propiedad enunciada anteriormente, encuentra si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales. Explica tu respuesta para cada caso:

- Número de naranjas y cantidad de vitamina C.
- Número de obreros y tiempo para construir una casa.
- Cantidad de comida y tiempo que dura para alimentar a una mascota.
- Cantidad de agua y tamaño de una alberca.
- Número de bombas para llenar una alberca y tiempo de llenado.
- Velocidad de un carro y tiempo empleado para llegar a Cuernavaca.

2. De los siguientes enunciados señala cuáles se pueden resolver con regla de tres simple directa y solúcionales.

- 1) Dos kilogramos de café costaron \$ 123 ¿Cuánto costarán $\frac{16}{5}$ kg del mismo café?
- 2) Tres obreros construyeron una pared en 6 días ¿Cuántos obreros se necesitarán para construir la misma pared en 2 días?
- 3) En un mapa un centímetro equivale a 155 km. Si dos ciudades, en el mapa, están separadas por $\frac{11}{2}$ cm ¿Cuál es la distancia real entre ellas?
- 4) En un campamento, 52 personas consumen 110 litros de agua al día ¿Cuánta consumirán en un día 23 personas?
- 5) En un campamento, la comida alcanza para que 52 personas se alimenten durante 12 días ¿Para cuántos días alcanzará si el número de personas se reduce a 23?

- 6) Escribiendo 3 páginas en una hora y trabajando 8 horas al día, ¿cuántos días se requieren para escribir un libro de 912 páginas?
- 7) Los lunes, miércoles y viernes gano \$70 al día; martes y jueves no trabajo, y los sábados y domingos gano \$120. Sin embargo, no trabajo todos los domingos, sólo cada quince días ¿Cuánto ganaré en 18 semanas?

3. Si a la región azul de la bandera le asignamos el número 2, ¿qué número tendríamos que otorgarle a una de las regiones de color rojo?

Azul		Verde	
Roja	Roja	Roja	Roja

4. Arturo infla 8 globos cada tres minutos. ¿Cuántos globos habrá inflado después de dos horas si de cada diez globos inflados uno explota?

Actividad 6.5.9

Considera la tabla de la Actividad 6.5.5. Ahora se agregó una nueva columna. Completa la tabla calculando la razón entre el precio y los kilogramos de frijoles.

Kilogramos de frijoles	Precio	$\frac{\text{Precio}}{\text{Kilogramo}}$
24	\$ 84	$\frac{84}{24} = 3.5$
48		
	\$ 42	
120		
	\$ 252	
3		

- 1) ¿Qué observas en la última columna?

Como habrás observado, el cociente $\frac{\text{Precio}}{\text{Kilogramos de frijoles}}$ es una cantidad constante. Esto se debe a que las cantidades (precio y kilogramos de frijoles) son magnitudes directamente proporcionales. A esta cantidad se la llama constante de proporcionalidad.

- 2) ¿Qué interpretación le darías a la constante de proporcionalidad?

Actividad 6.5.10

- 1) Si la constante de proporcionalidad es $\frac{\text{Precio}}{\text{Kilogramos de harina}} = 2.8$, completa la siguiente tabla:

Kilogramos harina	Precio
11	
22	
	\$ 89
57	
	\$ 2340

- 2) ¿Qué interpretación le darías a la constante de proporcionalidad en este caso?

Actividad 6.5.11

Explica qué es la constante de proporcionalidad. En tu explicación incluye:

- 1) Cuándo tiene sentido encontrarla y cuando no.
- 2) Como se calcula.
- 3) Cómo la interpretas, qué significa.
- 4) Para qué sirve.

 Discute tus respuestas con el profesor.

Actividad 6.5.12

En una tienda venden dos tipos de sal. Juan compró cinco bolsas, las cuales tiene o bien un tipo de sal o bien el otro. El problema es que se le mezclaron. Solo tiene el dato del peso y precio de cada bolsa, los cuales se resumen en la siguiente tabla:

Bolsa	Precio (\$)	Peso (kg)
A	1.90	2
B	2.30	3
C	3.07	4
D	3.83	5
E	6.65	7

Usando el concepto de constante de proporcionalidad, encuentra que bolsas tiene el mismo tipo de sal.



6.6 Porcentaje

Actividad 6.6.1

Carlos tiene \$ 150. Escribe a cuánto dinero equivalen los siguientes porcentajes:

- 1) 1% de su dinero.
- 2) 10 % de su dinero
- 3) 20% de su dinero
- 4) 73.5 % de su dinero

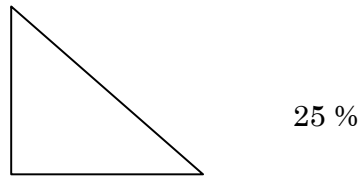
Actividad 6.6.2

En una bolsa hay arroz y Juan Mario extrae el 20 % de la misma, que resulta ser de 23 kg. Completa los siguientes datos

¿Cuántos kilogramos serían el 40 %? ¿y el 10 %? ¿y el 100 %?

Actividad 6.6.3

Si la siguiente figura representa el 25% de una pared:

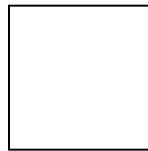


Dibuja una figura que represente los siguientes porcentajes:

- a) 50% b) 100% c) 12.5%

Actividad 6.6.4

La siguiente figura representa el 40 % área del terreno:



Dibuja una figura que represente los siguientes porcentajes:

- a) 80% b) 50% c) 75% d) 100%

Actividad 6.6.5

Explica por qué en un problema de porcentajes (cómo los de las actividades anteriores), podemos aplicar regla de tres simple directa.

 *Discute tus respuestas con el profesor.*

En los problemas de porcentaje no debemos olvidar el dato de que el total de la cantidad con la que estamos trabajando representa el 100%.

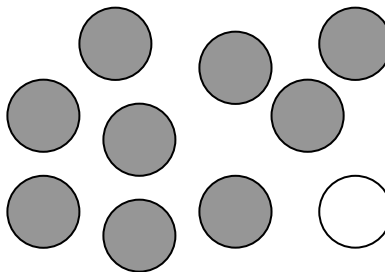
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve los siguientes problemas:

- 1) Determina el 12% de 230 y el 43% de 23.
- 2) El 15 % de cierto número es 23. ¿Cuál es el número?
- 3) Una prenda que cuesta \$ 450 tiene una rebaja del 15%, y otra rebaja adicional del 8% si se paga en efectivo ¿Cuánto cuesta la prenda pagando en efectivo?
- 4) En una encuesta en la UACM se encontró que de 150 hombres el 75% estudia Ingeniería y el resto Promoción de la Salud. Por otro lado, 90 mujeres estudian Ingeniería y el 72% restante estudia Promoción de la Salud. a) ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados? b) ¿Cuántos hombres estudian Ingeniería? c) ¿Qué porcentajes de estudiantes son mujeres? d) ¿Qué porcentaje de estudiantes estudia Ingeniería?
- 5) En un viaje, María compró tres llaveros a \$ 4.57 cada uno, cinco marcos para retrato a \$ 2.99 cada uno y doce paquetes de dulce a \$ 0.39 cada paquete. Si se le agregó el 6% de impuesto a la venta ¿Cuánto gastó?
- 6) La pensión de Julio aumentó de \$ 400 a \$ 550 ¿Cuál fue el porcentaje de aumento?
- 7) El censo de 1990 en los Estados Unidos mostró que la población de Alabama era de 4040587, con un 25.3% de afroamericanos ¿Cuál es la población de afroamericanos?
- 8) El precio de un carro es \$ 90600. Un comerciante anunció una rebaja de \$ 1560 ¿Cuál es el porcentaje de la rebaja?

2. ¿Qué es mayor: el 25 % de 78 o el 78% de 25? Justifica tu respuesta.

3. ¿Cuántas canicas blancas hay que agregar para que el 40% de las canicas sean de este color?



4. Unas botas que cuestan \$150 el par se reduce su precio en un 40% en una venta especial de fin de semana ¿En cuál porcentaje debe ser incrementado su precio de fin de semana para venderlas a \$ 150 el par?

6.7 Autoevaluación

- 1 Si 3 litros de aceite cuestan \$28 ¿Qué interpretación le darías a los siguientes números?

a) $\frac{3}{28}$ b) $\frac{28}{3}$ c) $3 + 28$

- 2 Considera que cada litro de aire tiene la misma cantidad de nitrógeno. Si en 3 litros de aire hay, aproximadamente, $\frac{12}{5}$ litros de nitrógeno y en un recipiente que contiene aire se detectaron $\frac{3}{2}$ litros de nitrógeno ¿Cuántos litros de aire hay en el recipiente?
- 3 Identifica en qué actividad (o actividades) aprendiste o entendiste cuando hay que multiplicar o dividir si te dan el costo unitario (de 1 kg) de acuerdo a lo que se te pide. Introduce un ejemplo, de los trabajados, para completar tu explicación.
- 4 Un viaje México-Monterrey cuesta \$ 1500 en la empresa Norte, pero, por ser período de vacaciones el boleto tiene un descuento del 30 %. En la empresa Sur, por otro lado, el boleto cuesta \$ 1700 con un descuento del 40% ¿Cuál de las dos empresas me conviene? Explica tu respuesta.
- 5 Identifica en que actividad (o actividades) aprendiste o entendiste cómo interpretar una razón.
- 6 Identifica en que actividad (o actividades) aprendiste o entendiste cuando se puede aplicar la regla de tres y cuando no.
- 7 De los siguientes problemas determina cuáles se pueden resolver usando la regla de tres simple directa y soluciónalos. También resuélvelos usando el razonamiento en proporciones y compara tus resultados.
- Siete albañiles construyen una casa en 70 días, ¿cuántos albañiles se necesitarán para construir la misma casa en 30 días?
 - Se necesitan 250 mg de medicamento para una persona que pesa 50 kg. Si Juan pesa 77 kg, ¿cuántos mg de medicamento necesita?
- 8 En este problema los cálculos ya están hechos. Las preguntas son acerca del razonamiento realizado en cada paso.

Si 6.7 kg de azúcar cuestan \$ 28.6. Determina el precio de 204 kg de azúcar.

$$\text{Paso 1} \quad \frac{6.7}{28.6} = 0.23$$

$$\text{Paso 2} \quad \frac{204}{0.23} = 886.95$$

- 1) ¿Cómo interpretas el número 0.23?
- 2) Haz un diagrama para explicar por qué se divide en el paso 1.
- 3) ¿Cómo interpretas el número 886.95?
- 4) Haz un diagrama para explicar por qué se divide en el paso 2.

Objetivos de aprendizaje del capítulo 6

Después de terminar este capítulo debes de ser capaz de hacer las siguientes cosas:

- 1 Resolver y formular problemas tales como: 1) obtener el costo de cierta cantidad de objetos si sabemos el precio unitario; 2) obtener la masa correspondiente a una cantidad de dinero si sabemos el precio por kilo, etc. Es importante que seas capaz de identificar cuáles eran tus dificultades (o la de tus compañeros) y que expliques como se fueron resolviendo con las actividades.
- 2 Explicar, con tus propias palabras, qué significa una interpretación de un número calculado y para qué es útil. Además, establecer la diferencia entre la interpretación de un número y la explicación de cómo calcularlo.
- 3 Identificar cuándo cierto número calculado no tiene una interpretación clara.
- 4 Identificar cuándo dos cantidades son directamente proporcionales y cuándo no.
- 5 Describir, con tus propias palabras, el conjunto de actividades que te llevaron a poder entender de dónde sale la “regla de tres”, y para qué tipo de cantidades se puede aplicar la “regla de tres simple directa”.
- 6 Explicar qué significa la constante de proporcionalidad (para qué es útil, cómo la calculas y cómo la interpretas).
- 7 Explicar cómo se hace para calcular porcentajes y qué relación hay con la “regla de tres”.
- 8 Formular y resolver problemas como los del final del capítulo (Autoevaluación).

Apéndice 1

Formato para la resolución de problemas

A veces, empezar a resolver un problema puede ser difícil. Para ayudarte, te proponemos un formato que te permitirá ordenar y aclarar tus ideas. Dividiremos el proceso de solución de un problema en tres partes principales: *datos*, *desarrollo* y *resultado*. En cada una de ellas debes incluir lo que se menciona a continuación. Si puedes ir contestando cada uno de los siguientes puntos, al final habrás resuelto el problema. En caso contrario podrás identificar donde te atascaste y buscar ayuda.

Datos:

- 1) ¿Qué sabemos? Incluye toda la información relevante que se proporciona en el enunciado del problema.
- 2) ¿Qué nos preguntan? Identifica con claridad lo que se te pide. Si esto no te es claro, es importante que leas nuevamente el enunciado o pidas ayuda al profesor.
- 3) Haz un dibujo o esquema en el que incluyas tanto los datos como lo que quieres encontrar.
- 4) Con base en tu esquema, intenta anticipar (cualitativamente) cual será la respuesta del problema.

Desarrollo:

- 5) Identifica a qué tema o conjuntos de temas del curso corresponde el problema (suma de fracciones, interpretación, proporciones, porcentaje, etc.).
- 6) Realiza las operaciones necesarias dando una interpretación del número que obtienes en cada una de ellas. Si la operación requiere una explicación, inclúyela. (Observa que la interpretación de un número calculado y la explicación de la operación que te lleva a ese número son dos cosas diferentes).

Resultado:

- 7) Escribe claramente la respuesta a la pregunta formulada en 2.
- 8) Revisa que tu respuesta sea consistente con la anticipación que hiciste en 4.

Ejemplo

José sale de su casa con \$50 y gasta $\frac{4}{5}$ en el cine y $\frac{1}{10}$ en dulces ¿Cuánto dinero le queda?

Datos:

- 1) ¿Qué sabemos? Incluye toda la información relevante que se proporciona en el enunciado del problema.

Dinero que tiene.....\$ 50

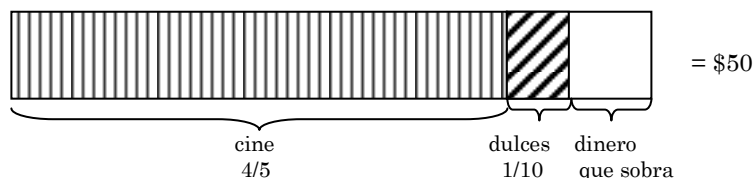
Fracción del dinero que gasta en el cine..... $\frac{4}{5}$

Fracción del dinero que gasta en dulces..... $\frac{1}{10}$

- 2) ¿Qué nos preguntan? Identifica con claridad lo que se te pide. Si esto no te es claro, es importante que leas nuevamente el enunciado o pidas ayuda al profesor.

¿Cuánto dinero le queda?

- 3) Haz un dibujo o esquema en el que incluyas tanto los datos como lo que quieres encontrar.



- 4) Con base en tu esquema, intenta anticipar (cualitativamente) cual será la respuesta del problema.

Como $\frac{4}{5}$ es cercano al entero, entonces podemos decir que José se gastó casi todo su dinero, es decir, no le puede quedar mucho dinero. Si el resultado me sale como \$ 30, o \$40 seguro estoy mal. Un resultado razonable sería \$ 2 o \$ 6.

Desarrollo:

- 5) Identifica a que tema o conjuntos de temas del curso corresponde el problema (suma de fracciones, interpretación, proporciones, porcentaje, etc.).

Este es un problema de suma y resta de fracciones y además de multiplicación de fracciones.

- 6) Realiza las operaciones necesarias dando una interpretación del número que obtienes en cada una de ellas. Si la operación requiere una explicación, inclúyela. (Observa que la interpretación de un número calculado y la explicación de la operación que te lleva a ese número son dos cosas diferentes).

Primero vamos a determinar la fracción que José gastó en los dulces y el cine junto:

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \quad (\text{fracción que José gastó})$$

De esta manera, el dinero que gastó es $\frac{9}{10}$ de los \$ 50 que tenía:

$$\frac{9}{10} \text{ de } \$50 = \frac{9 \times 50}{10} = \$45 \quad (\text{dinero que gastó José})$$

Lo que le queda es:

$$\$50 - \$45 = \$5 \quad (\text{dinero que le queda})$$

Resultado:

- 7) Escribe claramente la respuesta a la pregunta formulada en 2.

A José le quedan \$ 5 después de su salida.

- 8) Revisa que tu respuesta sea consistente con la anticipación que hiciste en 4.

El resultado, \$ 5, es consistente con la predicción que hicimos anteriormente.

Resumiendo, la solución del problema queda de la siguiente manera.

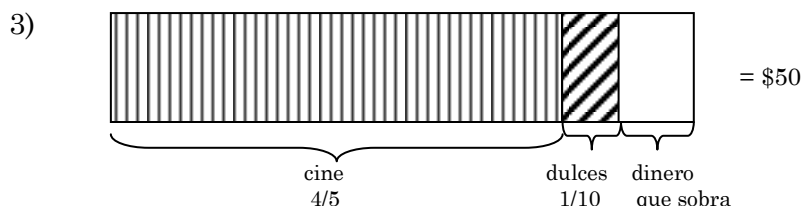
Datos:

- 1) Dinero que tiene\$ 50

Fracción del dinero que gasta en el cine ... $4/5$

Fracción del dinero que gasta en dulces ... $1/10$

- 2) Debemos encontrar: ¿Cuánto dinero le queda?



- 4) Como $4/5$ es cercano al entero, entonces podemos decir que José se gastó casi todo su dinero, es decir, no le puede quedar mucho dinero. Si el resultado me sale como \$ 30, o \$40 seguro estoy mal. Un resultado razonable sería \$ 6 o \$ 2.

Desarrollo:

- 5) Este es un problema de suma y resta de fracciones y además de multiplicación de fracciones.
- 6) Primero vamos a determinar la fracción que José gastó en los dulces y el cine junto:

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \quad (\text{fracción que José gastó en el cine y en dulces})$$

De esta manera, el dinero que gastó es $\frac{9}{10}$ de los \$ 50 que tenía:

$$\frac{9}{10} \text{ de } \$50 = \frac{9 \times 50}{10} = \$45 \quad (\text{dinero que gastó José})$$

Entonces:

$$\$50 - \$45 = \$5 \quad (\text{dinero que le queda})$$

Resultado:

- 7) A José le quedan \$ 5 después de su salida.
- 8) El resultado, \$ 5, es consistente con la predicción que hicimos anteriormente.

Apéndice 2

Ejercicios de repaso

Bloque 1

Resuelve las siguientes operaciones:

- | | | |
|-----------------------------------|---|-------------------------------------|
| $4 - 2 =$ | $-2 + 3 - 5 =$ | $(-1)(-6) =$ |
| $-4 - 2 =$ | $-2 - 3 + 5 =$ | $(6)(-1) =$ |
| 1) $4 + 2 =$ | 2) $2 - 3 - 5 =$ | 3) $\frac{6}{-3} =$ |
| $-4 + (-2) =$ | $-2 + 3 + 5 =$ | $-9 \div -1 =$ |
| $(-1)(8)2 =$ | $2 + 3(-2) =$ | $5-8 =$ |
| 4) $\left(\frac{-8}{1}\right)2 =$ | 5) $2 + 3 \cdot 2 =$ | 6) $5-(10-2) =$ |
| $2(-8) - 1 =$ | $-2 - 3 \cdot 2 =$ | $5-10-2 =$ |
| $2 - 8 - 1 =$ | $(2 + 3) \cdot 2 =$ | $(5-10) \cdot 2 =$ |
| $6-4 =$ | $-1-4 =$ | $3+(2 \cdot 5)=$ |
| 7) $6-(7-3) =$ | 8) $-1-(2 \cdot 2) =$ | 9) $(3+2) \cdot 5=$ |
| $6-7-3 =$ | $-1-2 \cdot 2 =$ | $2 \cdot (-1-3)=$ |
| $(6-7) \cdot 3 =$ | $(-1-2) \cdot 2 =$ | $[3+(2 \cdot 5)]+[2 \cdot (-1-3)]=$ |
| $(-2) + (-12 + 2) =$ | $(-2)(4)(-3)(-1) =$ | $-(10-9)=$ |
| $-(-2) \cdot (10) =$ | $\left(\frac{-4}{2}\right)\left(\frac{-3}{-1}\right) =$ | $-2(10-9)=$ |
| $-2 \cdot 10 =$ | 11) $\left(\frac{4}{-2}\right)(-3)[-(-1)] =$ | 12) $4[-2(10-9)]=$ |
| 10) $(-2)(-12+2)+2(-12+2) =$ | $\left(-\frac{4}{2}\right)\left(-\frac{3}{1}\right) =$ | $5+4[-2(10-9)]=$ |
| $1 - (-2)(5 - 8) =$ | | |
| $-1 - 4[-2(-3) - (4 - 5)] =$ | | |
| $(-1+3)(2+5) =$ | $(-5)(5-10)=$ | $(5+6)(-10-1)=$ |
| $(3-1)(5+2) =$ | 14) $(5-10)(10-5)=$ | 15) $5(-10-1)+6(-10-1)=$ |
| $(-1+3)2+(-1+3)5 =$ | $(-5 \cdot 5)+(5 \cdot 10)-10=$ | $(5+6)(-10)+(5+6)(-1)=$ |
| $3(5+2)-1(5+2) =$ | $-5 \cdot 5+5 \cdot 10-10=$ | $(5+6) \cdot 10+(5+6) \cdot 1=$ |

$$\begin{array}{lll}
 (3+1)(4+2)(5-1) = & (-2+5)(-2+5) = & (-2-6)(-2-6) = \\
 16) [3(4+2)+1(4+2)](5-1) = & 17) (-5+2)(-5+2) = & 18) (2+6)(2+6) = \\
 (3+1)[(4(5-1)+2(5-1))] = & (-1+3)(-1+3) = & (2-6)(2-6) = \\
 3+1 \cdot 4+2 \cdot 5-1 = & (-3+1)(3-1) = & (6-2)(6+2) =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (10-1)(10+1) = & 2(-3+5-8) = \\
 19) (10-2)(10+2) = & (1+2)(-3+5-8) = \\
 (10+4)(10-4) = & 20) 1+2(-3+5-8) = \\
 (10-10)(10+10) = 0 & 1+2-3(5-8) = \\
 & 1+2-3+5(-8) =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (-3+4-2)(-6) = & (-1-2-3-4)(-1) = \\
 21) (-3+4)-2(-6) = & (-1-2-3)(-4-5) = \\
 (-3)+(4-2)(-6) = & 22) (-1-2)(-3-4-5) = \\
 -3+(4-2-6) = & (-1)(-2-3-4-5) = \\
 & (-1-2-3-4-5) =
 \end{array}$$

Bloque 2

Resuelve las siguientes operaciones. Obtén un resultado simplificado siempre que sea posible.

$$\begin{array}{lll}
 1 - \frac{7}{5} = & 1 \cdot \frac{2}{3} = & \frac{5}{6} + 1 = \\
 1) 1 \cdot (1 + \frac{2}{5}) = & 2) 1 \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{3}\right) = & 3) \frac{5}{6} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{6}\right) = \\
 -(1 + \frac{2}{5}) + 1 = & 1 \cdot \left(1 \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{3}\right)\right) = & \left(\frac{5}{6} \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{6} = \\
 1 \cdot 1 + \frac{2}{5} = & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{2}{4} - \frac{7}{4} = & 1 - \frac{3}{7} = & \frac{2}{11} - 1 = \\
 4) \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = & 5) \frac{1}{7} + \left(1 - \frac{3}{7}\right) - \frac{4}{7} = & \frac{2}{11} - 1 - 1 = \\
 -\frac{5}{4} + \left(1 + \frac{1}{4}\right) = & 1 + 1 + \left(1 - \frac{3}{7}\right) = & \frac{2}{11} - 5 = \\
 & 4 + \left(1 - \frac{3}{7}\right) = & \left(\frac{2}{11} + 3\right) - \left(2 + \frac{1}{11}\right) =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{1}{4} \cdot 5 = & 3 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} = & \frac{2-9}{7} + 1 = \\
 7) \left(\frac{1}{4} + 1\right) 3 = & 8) \left(\frac{4}{3}\right) 6 - 1 = & \frac{1+4}{3} - \frac{2-3}{3} = \\
 \left(\frac{3}{4} - 1\right) 2 + \frac{1}{4} = & \left(\frac{2}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right) = & \frac{4-8}{5} - \frac{2-1}{5} = \\
 & & \frac{-13(2-5)}{11} + 1 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{3+2}{8} - 4 = \\
 10) \frac{3+2-4}{8} = \\
 \frac{-2(3+4)-1}{8} = \\
 (-2(3+4)-1)(8) =
 \end{array}$$

Bloque 3

Resuelve las siguientes operaciones. Obtén un resultado simplificado siempre que sea posible.

$$\begin{array}{llll}
 \frac{2}{4} = & \frac{6}{15} = & \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = & \frac{-25}{15} = \\
 \frac{4}{2} = & \frac{15}{6} = & \frac{5 \cdot 2}{15 \cdot 2} = & -\frac{150}{4 \cdot 25} = \\
 1) \frac{20}{40} = & 2) \frac{45}{18} = & \frac{50}{450} = & \frac{30}{-15} = \\
 \frac{80}{160} = & \frac{180}{45} = & \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{2}{15}\right) = & -\left(\frac{-12}{30}\right) =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = & \left(\frac{5}{18}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\frac{1}{3} = & (-3)\left(\frac{1}{9}\right) = \\
 5) \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{16}{10}\right) = & 6) \left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{9}{18}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = & 7) \left(\frac{16}{10}\right)(-200) = \\
 \left(\frac{6}{110}\right)\left(\frac{22}{30}\right) = & \left(\frac{13}{16}\right)\left(\frac{8}{3}\right)\frac{1}{4} = & \left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{5}{-1}\right) = \\
 \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{9}{10}\right) = & \left(\frac{70}{12}\right)\left(\frac{6}{10}\right) = & \left(\frac{-91}{-7}\right)\left(\frac{-130}{10}\right) =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{27}{6}\right) = & \frac{3+5}{4} = & \frac{2+8}{-8+2} = \\
 8) \frac{2}{5}\left(\frac{10 \cdot 37}{3 \cdot 6}\right) = & 9) \frac{7}{18-4} = & 10) \frac{-7+11}{22+6} = \\
 \left(\frac{15}{8} \cdot \frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{3} \cdot 5\right) = & \frac{2+12}{2+5} = & \frac{12-9}{3} + \frac{3}{6-3} = \\
 \left(\frac{15}{8} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{24}{3}\right) = & \frac{30-15}{10-5} = & \frac{-7+6}{12} + \frac{4}{24} =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{-1-1}{-1} - \frac{1-1-1}{-1-1} = & 5 \div \frac{1}{2} = & 100 \div \frac{1}{2} = \\
 11) \frac{2}{7} - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{14}\right) = & 2 \div \frac{1}{4} = & 100\left(\frac{1}{2}\right) = \\
 \left(3 + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{16}{10} \cdot \frac{4}{2}\right) = & 12) \left(\frac{1}{2}\right) \div 4 = & 13) \frac{1}{2} \div 100 = \\
 3 + \frac{2}{5} - \frac{16}{10} \cdot \frac{4}{2} = & \frac{4}{\frac{1}{2}} = & \frac{100}{\frac{1}{2}} =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = \\ \frac{5}{21} \div \frac{10}{7} = \\ \frac{3}{9} = \\ 14) \frac{5}{9} = \\ \frac{25}{25} \\ \frac{-8}{3} = \\ \frac{4}{15} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{4} \div \left(4 \cdot \frac{3}{6} \right) = \\ \left(\frac{-5}{7} \cdot \frac{14}{15} \right) \div \frac{2}{3} = \\ 15) \frac{1}{3} \div \left(\frac{3}{1} \div \frac{1}{3} \right) = \\ \frac{1}{2} = \\ \frac{1}{1} = \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{5} \div \frac{7}{10} = \\ \frac{4}{3} = \\ 16) \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{-1}{5}} \right) \div \left(\frac{5}{4} \right) = \\ \frac{1}{3} \left(\frac{-9}{4} \div 2 \right) = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \div \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ 17) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ \frac{9}{16} = \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \left(\frac{-100}{10} \right) \left(\frac{10}{1000} \right) \left(\frac{100}{-1000} \right) = \\ 18) \left(\frac{-100}{10} \right) \left(\frac{10}{1000} \right) \div \left(\frac{100}{-1000} \right) = \\ \left(\frac{-100}{10} \right) \div \left(\frac{10}{1000} \right) \left(\frac{100}{-1000} \right) = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{25}{16} = \\ \frac{16}{125} = \\ \frac{64}{27} \cdot \frac{16}{81} = \\ 19) \frac{27}{8} \cdot \frac{16}{81} = \\ \frac{-32}{27} \div \frac{16}{81} = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{320}{1600} = \\ 20) \frac{7500}{450} = \\ \frac{1200}{90} = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 4 = \\ \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \\ 21) \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = \\ \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = \end{array}$$

Bloque 4

Escribe como potencias los siguientes números: (Ejemplo: $(6)(6)(6) = 6^3$)

$$2 \cdot 2 =$$

$$(-1)(-1)(-1)(-1) =$$

$$3 =$$

$$1) (-10)(-10) =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$(0.01)(0.01) =$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$$

$$(-1/6)(-1/6) =$$

$$2) 10 \cdot 10(-10)(-10) =$$

$$\left(\frac{4}{11}\right)\left(-\frac{4}{11}\right)\left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{4}{11}\right) =$$

$$(0.3)(0.2)(0.3)(0.2)(0.3) =$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 =$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 =$$

$$3) (2 \cdot 3 \cdot 5)(2 \cdot 3 \cdot 5)(2 \cdot 3 \cdot 5) =$$

$$\frac{(2 \cdot 3 \cdot 5)(2 \cdot 3 \cdot 5)}{(2 \cdot 3 \cdot 5)} =$$

Escribe como productos: (observa el ejemplo)

$$5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$3^4 =$$

$$(-1)^3 =$$

$$4) (-4)^2 =$$

$$(4)^2 =$$

$$(10-1)^2 =$$

$$(1-10)^2 =$$

$$3^3 \cdot 2^3 =$$

$$5) (3 \cdot 2)^3 =$$

$$(3+2)^3 =$$

$$(3-2)^3 =$$

$$(-2)^2 \cdot 3^2 =$$

$$6) [(-2) \cdot 3]^2 =$$

$$(-2+3)^2 =$$

$$(2-3)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 3^4 =$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3\right)^4 =$$

$$7) \left(\frac{1}{2} + 3\right)^4 =$$

$$\left(\frac{1}{2} - 3\right)^4 =$$

Escribe como potencias de números primos (los primeros ejercicios son ejemplos)

$$\begin{array}{lll}
 8 = 2^3 & 12 = 2^2 \cdot 3^1 & 10 = 2^1 \cdot 5^1 \\
 16 = & 18 = & 120 = \\
 8) \ 81 = & 9) \ 20 = & 10) \ 200 = \\
 125 = & 30 = & 75 = \\
 1000 = & 25 = & 83 =
 \end{array}$$

Escribe como potencias y simplifica:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{24}{15} = \frac{2^3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{8}{5} & \frac{45}{18} = & \frac{-120}{140} = \\
 11) \ \frac{12}{15} = & 12) \ \frac{32}{14} = & 13) \ \frac{300}{-80} = \\
 \frac{20}{36} = & \frac{1250}{25} = & -\frac{125}{75} = \\
 \frac{13}{9} = & \frac{1}{16} = & -\left(\frac{-24}{30}\right) =
 \end{array}$$

Llena los cuadritos para que el lado izquierdo y el lado derecho sean el mismo número:

$$\begin{array}{lll}
 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^{\square} \cdot 2 = 128 & (-1)(-1)^{\square}(-1) = 1 & \frac{4 \cdot 4^{\square}}{3^2 \cdot 3^{\square}} = \frac{64}{243} \\
 (-3)^3(-3)(-3)^{\square} = (-3)^{10} & (-1)^{\square} = -1 & \frac{2^{\square} \cdot 5}{(-2)^{\square} \cdot 10} = 1 \\
 1) \ \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\square} = \frac{1}{64} & 2) \ \frac{(-1)^8}{(-1)^{\square}} = -1 & 3) \ \frac{3^{\square} \cdot 5^{\square}}{3^{10} \cdot 5^4} = \frac{3}{5} \\
 \frac{1}{4^{\square}} = \frac{1}{64} & \frac{2^{\square} 2^2}{2^{\square} 2^3} = 2 & \frac{8(3)^{\square}}{(2)^{\square} (3)^{12}} = \frac{9}{2}
 \end{array}$$

$$\frac{2^{\square}3^4}{3^{\square}2^7} = \frac{1}{12}$$

$$4) \frac{5^2 3^{\square}}{3^{\square} 5} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2^{\square} 3 \cdot 5}{3^{\square} \cdot 10} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{3^3 5^{\square} 2^3}{2^{\square} 3^{\square} 5^3}$$

$$5) \frac{9}{2} = \frac{2^3 6^{\square}}{8^2}$$

$$1 = \frac{2^{\square} 3^{\square} 4^{\square}}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$(3 \cdot 3 \cdot 3)^{\square} = 3^{12}$$

$$(2 \cdot 2)^{\square} = 2^8$$

$$6) 5^6 = \left(\boxed{} \right)^2$$

$$5^6 = \left(5^{\square} \right)^2$$

$$7^{11} = (7^{\square})^5 \cdot 7$$

$$1 = \frac{(3^2)^{\square}}{3^{10}}$$

$$7) 3 = \frac{(3^2)^{\square}}{3^{\square} \cdot 3^2}$$

$$2^6 = \frac{(2^3)^{\square}}{(2^{\square})^3}$$

$$\left(\frac{2^2}{3} \right)^{\square} = \frac{16}{9}$$

$$8) \left(\frac{2^{\square}}{3^{\square}} \right)^3 = \frac{64}{3}$$

$$\frac{2^{\square}}{3^4} = \frac{8}{9^{\square}}$$

$$\frac{9^3}{9^{\square}} = \frac{1}{9}$$

$$9) \frac{(-2)^4}{(-2)^{\square}} = \frac{1}{-2}$$

$$\frac{5^8}{5^{\square}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4^{\square}}{4^{10}} = \frac{1}{4}$$

$$10) \frac{8^{\square}}{8^2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{6^{\square}}{(6^3)^{\square}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2^3 \cdot 2^{\square}}{2^8} = \frac{1}{2}$$

$$11) \frac{3^{\square} \cdot (4^2)^3}{3^5 \cdot 4^{\square}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$3 \left(\frac{5}{5^{\square}} \right) = \frac{3}{25}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 2$$

$$12) \frac{\frac{3}{2^{\square}}}{\frac{3^{\square}}{2^2}} = 1$$

$$\frac{3^{\square}}{27} \div \left(\frac{27}{3} \right)^{\square} = 1$$

Bloque 5

Simplifica las siguientes expresiones. Ejemplo: $\sqrt{25} = 5$

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt{9} = & \sqrt{169} = & \sqrt{144 + 256} = \\
 \sqrt{100} = & \sqrt{144} = & \sqrt{144} + \sqrt{256} = \\
 \sqrt{81} = & & \\
 1) \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = & 2) \frac{\sqrt{144 + 25}}{\sqrt{144} + \sqrt{25}} = & 3) \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{256}} = \\
 \frac{\sqrt{16 + 9}}{\sqrt{16} + \sqrt{9}} = & \frac{\sqrt{169}}{13} = & \frac{\sqrt{144}}{256} =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt{9}(4 + \sqrt{4}) = & \sqrt[3]{8} = & \sqrt{16} + \sqrt{36} = \\
 \sqrt{9} \cdot 4 + \sqrt{4} = & \sqrt[3]{125} = & \sqrt{16 + 36} = \\
 (\sqrt{9}\sqrt{4})^2 = & & \sqrt{16}\sqrt{36} = \\
 4) (\sqrt{9} + \sqrt{4})^2 = & 5) \sqrt[3]{-8} = & 6) \sqrt{16 \cdot 36} = \\
 \sqrt{\frac{9}{4}} = & \sqrt[3]{-1000} = & (\sqrt{16}\sqrt{36})^2 = \\
 \frac{\sqrt{9}}{4} = & \sqrt[3]{-1} = & (\sqrt{16} + \sqrt{36})^2 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt[3]{27} = & (\sqrt{16} + \sqrt{25}) = \\
 \sqrt[3]{125} = & (\sqrt{16} - \sqrt{25})^2 = \\
 \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = & (-\sqrt{16} + \sqrt{25})^2 = \\
 7) \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{27} = & 8) \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \\
 (\sqrt[3]{64})^3 = & \frac{\sqrt{16}}{25} = \\
 (\sqrt[3]{1000})^3 = & \sqrt{\frac{16}{25}} =
 \end{array}$$

Bloque 6

Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) =$$

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{-5}{6}\right) - \left(\frac{-1}{8}\right) =$$

$$\frac{15}{12} - \left(\frac{-6}{18} + \frac{4}{24}\right) =$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} =$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \div 4 + \frac{1}{3} - 2 + 1^2 =$$

$$-1 + \left(\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right) + 2\right) =$$

$$1) -\frac{3}{2} + \frac{2}{5} \left[-\frac{7}{6} - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{16} =$$

$$2 - \frac{1}{\frac{3}{6}} + \frac{1}{\frac{-4}{\frac{5}{12}}} =$$

$$\frac{3}{5} \left(\frac{1 + \frac{12}{8}}{\frac{4}{4} - 1} \right) =$$

$$2) -\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{3}} + 1 =$$

$$(-2 + 3 \cdot 5)(-3 + \frac{1}{3}) \div (-4 - 1) =$$

$$10 + 3 - 5(4 + 2 - (9 - 3)) =$$

$$\frac{-12}{7} \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$\left(\frac{-12}{7} \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{3} \right) \right)^2 =$$

$$3) \frac{10 \left(\frac{2}{3} + \frac{-2+1}{5} \right) - (2+3)}{-2 + \frac{3}{4}} =$$

Bloque 7

El resultado de los siguientes ejercicios es correcto. Sin embargo, hay errores al escribir el procedimiento. Descúbrelos:

$$1) (2+3) \cdot 6 = 5 = 5 \cdot 6 = 30$$

$$2) (-8+5) + (-3) = -3 = -6$$

$$3) \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{4} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} = \frac{7}{6} \cdot \frac{4}{4} = \frac{7}{24}$$

$$4) -(-2+3) + 5 = 2 - 3 = -1 + 5 = 4$$

$$5) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{5} + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{4+2}{8}}{\frac{6+25}{15}} = \frac{\frac{6}{8}}{\frac{31}{15}} = \frac{6}{8} \cdot \frac{15}{31} = \frac{9}{4}$$

$$6) \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{9} = \frac{5}{3}$$

Bibliografía

Bibliografía para estudiantes

1 ¿????

2

Bibliografía para profesores

La postura general de este texto es cercana a: (Arons 1996, chap. 12 y 13) y (McDermott 1991).

Algunas de las dificultades observadas en los estudiantes se pueden encontrar en: (Arons 1996, chap. 1 y 13), (Wu 2001) y (Parsons et al. 2005).

La aproximación metodológica (didáctica) general del curso se puede revisar en: (Arons 1996), (McDermott and WA 1995) y (McDermott and Shaffer 2001). Y una reflexión relevante acerca de la importancia del rigor formal en los contenidos se puede ver: (Wu 2005a), (Eugene and Wu 2009) y (Arons 1996).

Las lecturas fueron tomadas de: (Paenza 2005), (Feynman 2001). También se pueden encontrar lecturas interesantes en: (Paulos 2002a), (Paulos 2002b) y (Feynman 1999).

Los contenidos y el orden lógico del texto está relacionado con lo que se puede encontrar en: (Lang 1988), (Lang and Murrow 2010), (Israel M. Gelfand and Shen 1993), (I.M. Gelfand and Saul 2001), (Wu 2007), (Wu), (Schmid and Wu 2008), y (Wu 2001).

Sobre el rol y las dificultades de los profesores se puede ver: (McDermott 2005) y (Wu 2005b).

Arons, Arnold B. 1996. *Teaching Introductory Physics*. 1st ed. Wiley, July 25.

Eugene, O. R., and H. Wu. 2009. "Learning algebra."

Feynman, Richard Phillips. 1999. *Que Significa Todo Eso*. Crítica, April.

———. 2001. *El Placer de Descubrir*. Crítica, November.

Gelfand, I.M., and Mark Saul. 2001. *Trigonometry*. 1st ed. Birkhäuser Boston, June 8.

Gelfand, Israel M., and Alexander Shen. 1993. *Algebra*. Birkhäuser Boston, December 1.

Lang, Serge. 1988. *Basic Mathematics*. Springer, July 1.

- Lang, Serge, and Gene Murrow. 2010. *Geometry*. Springer, December 1.
- McDermott, Lillian C., and Peter S. Shaffer. 2001. *Tutorials in Introductory Physics*. Prentice Hall College Div, August.
- McDermott, Lillian C., and Physics Education Group at Univ. of WA. 1995. *Physics by Inquiry: An Introduction to Physics and the Physical Sciences, Vol. 1*. 1st ed. Wiley, August 17.
- McDermott, "What we teach and what is learned: Closing the gap," *Am. J. Phys.* **59** (4) 301 (1991).
- McDermott, P.R.L. Heron, and P.S. Shaffer, "Preparing K-12 teachers to teach physics and physical science," APS Forum on Education Newsletter, Summer 2005, pp. 19-22.
- Paenza, Adrian. 2005. *Matemática Estas Ahí? Sobre Números, Personajes, Problemas Y Curiosidades Colección "Ciencia que ladra" Dirigida por Diego Golombek*. Universidad Nacional de Quilmes Editorial. Siglo Veintiuno Editores XXI.
- Parsons, S., J. Bynner, National Research, Development Centre for Adult Literacy, and Numeracy. 2005. *Does Numeracy Matter More?* National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy.
- Paulos, John Allen. 2002a. *El Hombre Anumérico*. Tusquets, January.
- . 2002b. *Un Matemático Lee El Periódico*. 1st ed. Tusquets, January.
- Schmid, W., and H. Wu. 2008. *The major topics of school algebra*. Citeseer.
- Wu, H. 2001. "How to prepare students for algebra." *American Educator* **25** (2): 10–17.
- . 2001. "What is so difficult about the preparation of mathematics teachers." *CBMS National Summit on the Mathematical Education of Teachers*.
- . 2005a. "Must content dictate pedagogy in mathematics education." *An expanded version of a talk given at California State University at Northridge on October 27: 2004*.
- . 2005b. "Professional development: The hard work of learning mathematics." *Retrived January 7: 2007*.
- . 2007. "Fractions, decimals, and rational numbers." *Retrieved on November 1: 2007*.
- . 2002. "Whole numbers (Draft)" y "Fractions (Draft)."